離散システム

1　離散システムの方程式 (狼とウサギ)

狼とウサギがある地域に生きている様を想像しましょう. ウサギは, 草を食べ, 子孫を増やし, 狼はそのウサギ゛を食べ, やはり自分の子孫を増やしていきます. 今の世代の個体数は, その前の親の世代の個体数に依存します.

狼が増えすぎて, ウサギを食べ過ぎて少なくなったら, 狼も食料が少なくなって狼も数が減ります. 逆に, 狼が少なくなりすぎて, ウサギが増えすぎたら, 草が食べ尽くされてウサギの餌がなくなりウサギが減少, それに伴って狼もというようにです.

実際の自然界では, 人間と言う「外乱」が邪魔をしない限り, それぞれの生き物達が絶妙のバランスを保って生きています. 生態系を表すモデル式の詳しい話しは別の機会として,$x(0)$ と $y(0)$ で今のウサギと狼の個体数, $x(n)$ と $y(n)$ で,n 年後のそれぞれの個体数を表すとすれば, ウサギと狼の個体数の変化を表す式は

$$x(n+1) = f(x(n), y(n)) \tag{1}$$

$$y(n+1) = g(x(n), y(n)) \tag{2}$$

という式で表されるでしょう. この式の意味するところは,$n+1$ 年後のウサギと狼の個体数がその前の年のウサギと狼の個体数 $x(n)$ と $y(n)$ で決まる事を表しています. 狼とウサギが生きている環境は毎年同じ(気象の変動や, 人間の環境破壊など外乱は無いもの) としています. f や g がどんな関数を表すかは取り合えず置いておきますが, このような方程式は, 生態系に限らず, 物理系, 機械系, 社会経済, etc にも現れます.(無論, 計算機関係にも)

今後, このような式を扱って行くわけですが, 先ずは最も簡単なものから手を付けます.

(1), (2) 式の替わりに

$$x(n+1) = \alpha x(n) + \beta y(n) \tag{1$'$}$$

$$y(n+1) = \gamma x(n) + \delta y(n) \tag{2$'$}$$

を扱います.$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数とします.

行列とベクトルを使えば,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$\chi(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix}$$

として

$$\chi(n+1) = A\chi(n) \tag{3}$$

と表すことができます.

$$\chi(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$

から始めて (3) 式から

$$\chi(1) = A\chi(0)$$

でさらに

$$\chi(2) = A\chi(1) = A(A\chi(0)) = A^2\chi(0)$$

続けると

$$\chi(3) = A\chi(2) = A(A^2\chi(0)) = A^3\chi(0)$$

$$\vdots$$

$$\chi(n+1) = A\chi(n) = A(A^n\chi(0)) = A^{n+1}\chi(0) \tag{4}$$

となります.

まずは手始めに,$\beta = \gamma = 0$ という特別な場合を考えましょう.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$$

ですから

$$A^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \delta^2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \delta^n \end{bmatrix}$$

さて以下の練習問題を解いてください.

練習問題 1

(0) $\alpha = \delta = 1$ のとき

(1) $0 < \alpha < 1, 0 < \delta < 1$ のとき

(2) $\alpha > 1, 0 < \delta < 1$ のとき

(3) $0 < \alpha < 1, \delta > 1$ のとき

(4) $\alpha > 1, \delta > 1$ のとき

$n \to \infty$ とすると $\chi(n)$ はどうなりますか？

2　行列の対角化

前節のお話を繰り返しますと.

$$x(n+1) = \alpha x(n) + \beta y(n) \tag{5}$$
$$y(n+1) = \gamma x(n) + \delta y(n) \tag{6}$$

という系について行列とベクトルを使えば,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$\chi(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix}$$

として (5), (6) は

$$\chi(n+1) = A\chi(n) \tag{7}$$

と表すことができました.

$$\chi(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$

から始めて (7) 式から

$$\chi(n+1) = A\chi(n) = \quad \cdots \quad = A^{n+1}\chi(0) \tag{8}$$

となります.
前回は手始めに, $\beta = \gamma = 0$ という特別な場合を考えました.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$$

ですから

$$A^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \delta^n \end{bmatrix}$$

と簡単に A^n が計算できたわけです.

さて, 今度は,$\beta = \gamma = 0$ とは限らない一般の場合を考えます.
ここで

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

にある可逆な行列

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$$

とその逆行列 V^{-1} を左右からかけて $V^{-1}AV$ という積を作り, これが

$$V^{-1}AV = \Gamma \tag{9}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

となったとします. こんな V はどうやって探すかという話しは取り合えず置いて, V とその逆行列 V^{-1} には

$$VV^{-1} = V^{-1}V = I$$

ただし,I は単位行列

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

が成り立っていますから

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \{V^{-1}AV\}\{V^{-1}AV\} \\ &= V^{-1}AVV^{-1}AV \\ &= V^{-1}AIAV \\ &= V^{-1}AAV \\ &= V^{-1}A^2V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^3 &= \Gamma^2\Gamma \\ &= \{V^{-1}A^2V\}\, V^{-1}AV \\ &= V^{-1}A^2VV^{-1}AV \\ &= V^{-1}A^2IAV \\ &= V^{-1}A^2AV \\ &= V^{-1}A^3V \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \Gamma^n &= \Gamma^{n-1}\Gamma \\ &= \{V^{-1}A^{n-1}V\}V^{-1}AV \\ &= V^{-1}A^{n-1}VV^{-1}AV \\ &= V^{-1}A^{n-1}IAV \\ &= V^{-1}A^{n-1}AV \\ &= V^{-1}A^nV \end{aligned}$$

となります．ここで Γ^n は

$$\Gamma^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix} \tag{10}$$

と簡単に計算できます.

$$\Gamma^n = V^{-1}A^nV \tag{11}$$

ですから, 両辺に左から V , 右から V^{-1} をかけると

$$\begin{aligned} V\Gamma^nV^{-1} &= V\{V^{-1}A^nV\}V^{-1} \\ &= VV^{-1}A^nVV^{-1} \\ &= IA^nI \\ &= A^n \end{aligned} \tag{12}$$

となります．Γ^n から A^n が簡単に計算できます. それで

$$V^{-1}AV = \Gamma \tag{9}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

となる行列 V を何とか探そうということにします．(9) 式の両辺に左から V をかけると

$$AV = V\Gamma \tag{13}$$

です．$V\Gamma$ を計算すると

$$\begin{aligned} V\Gamma &= \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda v_1 & \mu w_1 \\ \lambda v_2 & \mu w_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{14}$$

行列 V の縦に並んでいる要素をまとめて列ベクトル

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

と書くと, $V = [v, w]$ で,(14) 式は $V\Gamma = [\lambda v, \mu w]$ と書けます. すると

$$AV = V\Gamma \tag{13}$$

は,

$$A[v, w] = [\lambda v, \mu w]$$

でさらに左辺を計算すると

$$[Av, Aw] = [\lambda v, \mu w]$$

両辺の１列目, ２列目の列ベクトルは等しいはずですから

$$
\begin{aligned}
Av &= \lambda v \\
Aw &= \mu w
\end{aligned}
$$

という式がでてきます. 結局,

$$Ax = tx \tag{15}$$

という定数 t と列ベクトル x の組２組 $(\lambda, v), (\mu, w)$ を求める問題になりました.

(15) 式の右辺は単位行列 I を使って, $tx = tIx$ と書けますから,(15) 式の右辺を左辺に移項して,

$$(A - tI)x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

となります.

実数の１次方程式 $ax = 0$ の解は a の逆数 $1/a$ があれば（これは $a \neq 0$ という条件ですが）$x = (1/a)\,0 = 0$ だけです.

同様に, 行列 $(A - tI)$ の逆行列 $(A - tI)^{-1}$ があると,(16) 式の両辺に左から $(A - tI)^{-1}$ をかけて,

$$x = (A - tI)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となって

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

だけが解になってしまいます. これでは目的の V は求まりません. 大学１年次の線形代数の講義を思い出して頂くと, $(A - tI)$ が逆行列を持たない条件は, それの行列式について

$$|(A - tI)| = 0$$

でした. 実際, これを計算すると,

$$
\begin{aligned}
A - tI &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha - t & \beta \\ \gamma & \delta - t \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

から　行列式＝（左上×右下）－（右上×左下）によって

$$0 = |(A - tI)| = (\alpha - t)(\delta - t) - \beta\gamma \tag{17}$$

で t についての２次の代数方程式がでてきます.

まず (17) 式が異なる, 2つの実数根を持つ場合について考えます. この場合,$t=\lambda,\mu$ になるわけです. これに対応するベクトル v と w を求めるには,(15) 式から

$$\begin{aligned} v &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ w &= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

について

$$Av = \lambda v \tag{18}$$

$$Aw = \mu w \tag{19}$$

として,v, w を求めることになります.

$$|(A-\lambda I)| = 0$$
$$|(A-\mu I)| = 0$$

が成り立っていますから,(18), (19) は解は一意には決まりません.

たとえば $v_1=1, w_1=1$ などとすると,v_2, w_2 が決まります.

練習問題 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

とするとき, 上の議論によって,V と A の対角化 Γ を求めてください.

3　ジョルダン標準形

$$\chi(n+1) = A\chi(n) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \\ \chi(n) &= \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

で表される系についての議論でした.

(3) 式から

$$\chi(n) = A^n\chi(0) \tag{4}$$

となりますが, A^n をどう計算するかということになり, 行列 A の対角化の話になりました.
A にある行列 V とその逆行列 V^{-1} を左右からかけて, $V^{-1}AV$ という積を作り, これが

$$V^{-1}AV = \Gamma \tag{9}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

となったとすると（これを A の対角化と言います）

$$\Gamma^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix} \tag{20}$$

で,

$$V\Gamma^n V^{-1} = A^n \tag{21}$$

となります.
このような V を求めるために, A の固有値と固有ベクトルを求める問題

$$Ax = tx \tag{15}$$

を考えました.
行列式による固有値 t についての２次方程式（これを固有方程式）

$$|(A - tI)| = (\alpha - t)(\delta - t) - \beta\gamma = 0 \tag{17}$$

に２つの異なる実数根 λ, μ がある場合を扱いました.
今度はこの場合以外を考えます.

（a） まず, 方程式 (8) が共役複素数根 $\lambda = a + bi, \mu = a - bi (b \neq 0)$ をもつ場合.

この場合は, ２つの異なる実数根 λ, μ がある場合と同じですが, 行列 V の要素が複素数になります.
また A を対角化した行列 Γ も要素が複素数になります.

実数で表される系（３）式の話しに複素数？ と不思議に思われるかもしれませんが, 実数の要素だけの行列 A と要素が複素数の行列 V, Γ は

$$V^{-1}AV = \Gamma \tag{9}$$

で関係付けられていて,「帳尻」はあっています.

練習問題３

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

について, 上の式を確認してください.V, Γ を求めてください.

(b)　方程式 (8) が重根 $t = a$ をもつ場合. この場合は A がもとから対角線上に a が並ぶ対角行列である場合と、そうでない場合に分けられます。後者の場合対角化はできませんが, ある V という行列で

$$V^{-1}AV = \Gamma \tag{9}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

の形への変換が可能です.（これをジョルダン標準形といいます）

練習問題 4

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ V &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

について, 上の式を確認してください. この場合 Γ^n はどうなるでしょうか.

4　同値変換の系

さて, 系

$$\chi(n+1) = A\chi(n) \tag{3}$$

と V による A の変換

$$V^{-1}AV = \Gamma$$

に着目します.

ここで

$$\kappa(n) = V^{-1}\chi(n)$$

とおくと

$$\chi(n) = V\kappa(n)$$

で

$$\begin{aligned} \kappa(n+1) &= V^{-1}\chi(n+1) \\ &= V^{-1}A\chi(n) \\ &= V^{-1}AV\kappa(n) \\ &= \Gamma\kappa(n) \end{aligned}$$

となります.

(3) 式から

$$V^{-1}AV = \Gamma$$

$$\kappa(n) = V^{-1}\chi(n)$$

により

$$\kappa(n+1) = \Gamma\kappa(n) \tag{3'}$$

という式が出てきました.

これは初期値

$$\kappa(0) = V^{-1}\chi(0)$$

が与えられた (3) 式の系と同値な系と呼ばれます.

Γ は A がその固有方程式 $|A - tI| = 0$ が共役複素数解も含めて異なる 2 根 λ, μ を持てば

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

であり,

$$\Gamma^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix}$$

です. また,$|A - tI| = 0$ が重根 λ を持てば,A はもとから対角線上に λ が並ぶ対角行列か, あるいはジョルダン標準形

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

の形になり

$$\Gamma^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

で与えられます.

練習問題 5

$$\kappa(n) = \Gamma^n\kappa(0) = \Gamma^n\{V^{-1}\chi(0)\}$$

であることに注目してください.

固有方程式 $|A - tI| = 0$ の全ての根 λ が $|\lambda| < 1$ を満たすと,$n \to \infty$ で $\kappa(n)$ はどうなるでしょうか？ また $\chi(n)$ はどうなるでしょうか？

5 状態方程式

$$\chi(n+1) = A\chi(n) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \\ \chi(n) &= \begin{bmatrix} x(n) \\ y(n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

という系の議論でした.

(3) 式から

$$\chi(n) = A^n \chi(0) \tag{4}$$

が得られますが, 固有方程式 $|A - tI| = 0$ の全ての根 λ が $|\lambda| < 1$ を満たすと,$n \to \infty |\chi(n)| \to 0$ などの性質が判りました.

今度は (3) 式に $\omega(k)$ で表現される外部からの強制力が加わった系を考えます. ついでに式を一般化しておきます. 今まで n で時間の経過を表す変数にしましたが, これを k に変えます.

$\chi(k)$ を 2 次元の列ベクトルから,n 次元の列ベクトルへ,A は n 行 n 列の行列. 新たに加わった $\omega(k)$ は m 次元の列ベクトルにします. ただし,$(m \leq n)$ B は n 行 m 列の行列です.

$$\chi(k+1) = A\chi(k) + B\omega(k) \tag{5}$$

$$\chi(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$\omega(k) = \begin{bmatrix} \omega_1(k) \\ \omega_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_m(k) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nm} \end{bmatrix}$$

新たに加わった外部からの強制力は, 人間の意図的な「努力」などを表します. 最初, このお話は草原にいる狼と, ウサギの個体数から出発しましたが, ウサギや狼の頭数を調整したりする「保護活動」の努力を表すこともあるでしょう. あるいは, 保護と正反対な乱獲や環境破壊かもしれません.

無論, このような方程式は, 生態系に限らず, 物理系, 機械系, 社会経済,etc にも現れます. 社会経済なら, 各年度の政府の経済政策や税制政索を $\omega(k)$ が表すかもしれません. マイホーム獲得向けての毎年の財形計画や, お子さんの進学のための教育投資や計画かもしれません.

工学では ω は「制御変数」と呼ばれ χ はその時の系の何かの様子を表すので「状態変数」と呼ばれます.

用語の説明は, 制御工学やシステム工学の専門書などにお願いするとして, $\omega(0), \omega(1), \omega(2), \cdots, \omega(k)\cdots$ と意図的な外力（制御）を加えていくと,$\chi(0)$ から始まる $\chi(1), \chi(2), \cdots, \chi(k)\cdots$ はどうなるか調べてみます.

まず (5) 式から

$$\chi(1) = A\chi(0) + B\omega(0)$$

です. 次にこれと (5) 式から

$$\begin{aligned} \chi(2) &= A\chi(1) + B\omega(1) \\ &= A\{A\chi(0) + B\omega(0)\} + B\omega(1) \\ &= A^2\chi(0) + AB\omega(0) + B\omega(1) \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} \chi(3) &= A\chi(2) + B\omega(2) \\ &= A\{A^2\chi(0) + AB\omega(0) + B\omega(1)\} + B\omega(2) \\ &= A^3\chi(0) + A^2B\omega(0) + AB\omega(1) + B\omega(2) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \chi(k) &= A^k\chi(0) + A^{k-1}B\omega(0) + A^{k-2}B\omega(1) + A^{k-3}B\omega(2)\cdots + AB\omega(k-2) + B\omega(k-1) \\ &= A^k\chi(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B\omega(i) \end{aligned}$$

結局

$$\chi(k) = A^k\chi(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}B\omega(i) \tag{22}$$

Σ 記号の中の式では A のべき乗の指数と ω の括弧の中の数字が, その和が $k-1$ となるように変化しています. このような演算は畳み込み演算と呼ばれます.

いまは $\chi(0)$ から $\chi(k)$ へと計算しましたが, $\chi(s)$ から始めて $\chi(k)$ までなら

$$\chi(k) = A^{k-s}\chi(s) + \sum_{i=s}^{k-1} A^{k-1-i}B\omega(i) \tag{23}$$

となります.

6 可制御性

$k = s$ から $k = s+n-1$ まで (5) 式の系に何らかの n 個の制御量 $\omega(s), \omega(s+1), \omega(s+2), \cdots, \omega(s+n-1)$ を加えて任意の $\chi(s)$ から出発して $\chi(s+1), \chi(s+2), \cdots \chi(s+n)$ と変化させ, 最後の $\chi(s+n)$ がある目

標の χ_f と等しくなるようにできるかどうかを考えます. これが可能な場合, 系 (3) は「可制御」であるといいます.

状態変数のベクトルの次元数 n と同じ数の n 個必要です.

政府の n ヵ年計画が成功するかどうかとか, n 年後に目的を達成するような, 政策立案が可能かといった問題です. あるいは, お子様への n ヵ年教育計画で, 目標の学校受験のための学力向上の努力かもしれません.

結果は同じですので $s=0$ とします.(23) 式の k に n を入れると

$$\chi(n) = A^n\chi(0) + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i}B\omega(i)$$

$\chi(n) = \chi_f$ となるようにしたいわけで, また最初の $\chi(0)$ は変えることができませんから,

$$\sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i}B\omega(i) = \chi_f - A^n\chi(0) \tag{24}$$

となります.

この式を満足する $\omega(0), \omega(1), \omega(2), \cdots, \omega(n-1)$ があるか？　という問題です.

$\omega(0), \omega(1), \omega(2), \cdots, \omega(n-1)$ はそれぞれ m 次元の列ベクトルですが, これを縦に並べて

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega(0) \\ \omega(1) \\ . \\ . \\ . \\ \omega(n-1) \end{bmatrix}$$

という mn 次元の列ベクトルを作り, n 個の n 行 m 列の $A^{n-1}B, A^{n-2}B, \cdots, AB, B$ を横に並べて $G = [A^{n-1}B, A^{n-2}B, \cdots, AB, B]$ という n 行 mn 列の行列を作ると, (8) 式は

$$G\Omega = \chi_f - A^n\chi(0) \tag{25}$$

という方程式です. 未知数のベクトルが Ω で寸法が mn , 係数の行列 G が n 行 mn 列で, Ω のうち $mn-n$ 個分だけ自由度があります. この方程式が解を持つためには「 G の階数が n 」という条件　(G の n 行 n 列の正方な部分行列のどれかの行列式の値が $\neq 0$) ということが条件です.

これを

$$Rank(G) = n$$

と書きます. すなわち

$$(5) \text{ の系が可制御} \Longleftrightarrow Rank(G) = n$$

ここでは, 判りやすくするために B を n 行１列の行列, つまり,m 次元の列ベクトル b としてみます. この場合,$\omega(k)$ はベクトルではなく数になります. (１次元列ベクトルですから)

$$\chi(k+1) = A\chi(k) + B\omega(k) \tag{5}$$

すると

$$G = [A^{n-1}b, A^{n-2}b, \cdots, Ab, b]$$

は n 行 n 列の正方行列になります．すると (25) を満足するための Ω があるためには, G の行列式 $\neq 0$ です．即ち

$$(5) \text{ の系が可制御} \Longleftrightarrow Rank(G) = n \Longleftrightarrow G \text{ の行列式} \neq 0$$

練習問題６

$$\chi(k+1) = A\chi(k) + b\omega(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

について可制御性を判定してください．この場合は $n = 2$ です．

7　可観測性

今までのお話は

$$\chi(k+1) = A\chi(k) + B\omega(k) \tag{5}$$

$$\chi(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$\omega(k) = \begin{bmatrix} \omega_1(k) \\ \omega_2(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_m(k) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{1,n} \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{1,m} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \cdots & B_{n,m} \end{bmatrix}$$

のお話で,

$\omega(s), \omega(s+1), \omega(s+2), \cdots, \omega(k)\cdots$ と意図的な外力（制御）を加えていくと, $\chi(s)$ から始まる $\chi(s+1), \chi(s+2), \cdots, \chi(k)\cdots$ はどうなるか調べてみました. 結局

$$\chi(k) = A^{k-s}\chi(s) + \sum_{i=s}^{k-1} A^{k-1-i}B\omega(i) \tag{23}$$

となります.

$k = s$ から $k = s+n-1$ まで (5) 式の系に何らかの n 個の制御量 $\omega(s), \omega(s+1), \omega(s+2), \cdots, \omega(s+n-1)$ を加えて任意の $\chi(s)$ から出発して $\chi(s+1), \chi(s+2), \cdots\chi(s+n)$ と変化させ, 最後の $\chi(s+n)$ がある目標の χ_f と等しくなるようにできるかどうかを考えます. これが可能な場合, 系 (5) は「可制御」であるといいます. このための条件は

$$(5)\ \text{の系が可制御} \Longleftrightarrow Rank(G) = n$$

$$G = [A^{n-1}B, A^{n-2}B, \cdots, AB, B]$$

でした.

ここで $Rank(G) = n$ すなわち「 G の階数が n 」という条件は G の n 行 n 列の正方な部分行列のどれかの行列式の値が $\neq 0$ ということが条件でした.

さて (5）式の系に

$$\eta(k) = C\chi(k) + D\omega(k) \tag{26}$$

という式を加えます.

$\eta(k)$ は p 次の列ベクトル, C, D はそれぞれ p 行 n 列の行列, p 行 m 列の行列です.

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{1,n} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ C_{p,1} & C_{p,2} & \cdots & C_{p,n} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \cdots & D_{1,m} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & \cdots & D_{1,m} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ D_{p,1} & D_{p,2} & \cdots & D_{p,m} \end{bmatrix}$$

$\chi(k)$ が系の状態変数と呼ばれるのに対して,$\eta(k)$ は系の出力と呼ばれます.

$$\chi(k+1) = A\chi(k) + B\omega(k) \tag{5}$$
$$\eta(k) = C\chi(k) + D\omega(k) \tag{26}$$

を時不変な離散時間線形システムの状態方程式と呼びます. 「時不変」というのは, 係数行列 A, B, C, D が時間に（ k に）依存しない定数行列だからです.「線形」というのは (5),(26) が $\chi(k), \omega(k)$ について線形（係数行列 A, B, C, D がそれぞれ掛け合わされ, 加えられている）という意味です.

$\chi(k)$ をお子様の学力, $\omega(k)$ を進学準備のための教育の投資・努力に例えましたが, $\chi(k)$ が学力の要素「計算能力」「読解力」「論理思考能力」etc などを表し, $\eta(k)$ は学期末テストの（総合）得点などに例えられます.

教育の投資・努力 $\omega(k)$ によって変化するのは学力 $\chi(k)$ ですが, これが目に見えて確認できる（観測できる）のは学期末テストの（総合）得点などの $\eta(k)$ で, $\omega(k)$ は学力 $\chi(k)$ を経由して C という行列によって間接的に $\eta(k)$ をもたらしていることになります. 無論 $D\omega(k)$ のように直接 $\eta(k)$ に影響する項もありますが.

[親子の会話]

教育ママ（または教育パパ） 「XXX君, ちっとも成績良くならないね !! 勉強してるの？」=「 $\eta(n)$ が上がらないね, $\omega(0), \cdots \omega(n-1)$ は？」

覚めた子供 「そんなこと言ったって, ちゃんと勉強（努力）してきたよ. でもパパ達の子供だものしょうがないでしょ」　=「 $\omega(0), \cdots \omega(n-1)$ はちゃんと与えた, そもそも初期点 $\chi(0)$ が悪い.」

家庭内の会話は兎も角：A, B, C, D と $\eta(0), \eta(1), \cdots, \eta(n-1), \omega(0), \ldots \omega(n-1)$ から $\chi(0)$ を決定するにはどのような条件が必要でしょうか？ C が正方行列で逆行列 C^{-1} があれば $\eta(0) = C\chi(0) + D\omega(0)$ から

$$\chi(0) = C^{-1}\{\eta(0) - D\omega(0)\}$$

で直ぐに判るのですが, C は一般には, そうではありません. $C = [1, 1, 1, \cdots 1]$ という横ベクトルで $C\chi(k)$ がその $\chi(k)$ の成分の総和 ($\chi(k)$ が k 年後の [国語, 数学, 英語, 物理, 化学, 生物] の学力,$C\chi(k)$ が総合得点ということもあるでしょう.)

テストの得点は基礎学力の投影であっても, それだけで, 基礎学力を正確に知ることは出来ません.

これには (5),(26) を再度見てみる必要があります.

$$\eta(0) = C\chi(0) + D\omega(0)$$

次に

$$\eta(1) = C\chi(1) + D\omega(1)$$

で,

$$\chi(1) = A\chi(0) + B\omega(0)$$

でしたから

$$\eta(1) = CA\chi(0) + CB\omega(0) + D\omega(1)$$

同様に

$$\eta(2) = C\chi(2) + D\omega(2)$$

で

$$\chi(2) = A^2\chi(0) + AB\omega(0) + B\omega(1)$$

でしたから

$$\eta(2) = CA^2\chi(0) + CAB\omega(0) + CB\omega(1) + D\omega(2)$$

さらに

$$\eta(3) = C\chi(3) + D\omega(3)$$

で

$$\chi(3) = A^3\chi(0) + A^2B\omega(0) + AB\omega(1) + B\omega(2)$$

でしたから

$$\eta(3) = CA^3\chi(0) + CA^2B\omega(0) + CAB\omega(1) + CB\omega(2) + D\omega(3)$$

この操作を繰り返せば,

$$\eta(k) = CA^k\chi(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-1-i}B\omega(i) + D\omega(k)$$

結局

$$\rho(k) = \sum_{i=0}^{k-1} CA^{n-1-i}B\omega(i) + D\omega(k)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\eta(0) &= C\chi(0) + \rho(0) \\
\eta(1) &= CA\chi(0) + \rho(1) \\
\eta(2) &= CA^2\chi(0) + \rho(2) \\
\eta(3) &= CA^3\chi(0) + \rho(3) \\
&\vdots \\
\eta(n-1) &= CA^{n-1}\chi(0) + \rho(n-1)
\end{aligned}$$

を得て, これを見やすいように変形して

$$\begin{aligned}
C\chi(0) &= \eta(0) - \rho(0) \\
CA\chi(0) &= \eta(1) - \rho(1) \\
CA^2\chi(0) &= \eta(2) - \rho(2) \\
CA^3\chi(0) &= \eta(3) - \rho(3) \\
&\vdots \\
CA^{n-1}\chi(0) &= \eta(n-1) - \rho(n-1) \qquad (27)
\end{aligned}$$

ここで A, B, C, D と $\eta(0), \eta(1), \cdots, \eta(n-1), \omega(0), \cdots \omega(n-1)$ が全て判っていますから $\rho(0), \rho(1), \cdots, \rho(n-1)$ も既知な量です.

n 個の p 行 n 列の行列 $C, CA, CA^2, CA^3, \cdots, CA^{n-1}$ を縦に並べ np 行 n 列の行列

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

と np 次の列ベクトル

$$P = \begin{bmatrix} \eta(0) - \rho(0) \\ \eta(1) - \rho(1) \\ \eta(2) - \rho(2) \\ \eta(3) - \rho(3) \\ \cdots \\ \eta(n-1) - \rho(n-1) \end{bmatrix}$$

を作ると (27) 式は

$$M\chi(0) = P \tag{28}$$

となります.

方程式 (28) が解を持つ条件は

$$rank(M) = n$$

です.

A, B, C, D と $\eta(0), \eta(1), \cdots, \eta(n-1), \omega(0), \cdots \omega(n-1)$ から $\chi(0)$ を決定できる場合, この系は可観測であるといいます.

特に C が１次の横ベクトルの場合（この場合, 出力 $\eta(k)$ はベクトルでなく数）は, この条件は M の行列式 $\neq 0$ と同値です.

今までの議論をまとめると時不変な離散時間線形システムの状態方程式

$$\chi(k+1) = A\chi(k) + B\omega(k)$$

$$\eta(k) = C\chi(k) + D\omega(k)$$

について

$$\text{この系が可制御} \Longleftrightarrow Rank(G) = n$$

ただし,

$$G = [A^{n-1}B, A^{n-2}B, \cdots, AB, B]$$

$$\text{この系が可観測} \Longleftrightarrow Rank(M) = n$$

ただし,

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

練習問題 7

$$\chi(k+1) = A\chi(k) + B\omega(k)$$

$$\eta(k) = C\chi(k) + D\omega(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = [1, 1]$$

B, D も適当な行列とします.
この系の可観測性を判定してください. この場合は $n = 2$ です.

8　ケーリー・ハミルトンの定理

資源の「リサイクル」は今日的課題ですが, この節では, 行列の「リサイクル」の話をします. これは次節のお話の準備です.

行列 A の固有値を求め, A の対角化を行いましたが, そのとき用いた特性方程式

$$|A - \lambda I| = 0$$

については, 他の性質も知られています. A が n 次の正方行列なら $|A - \lambda I|$ は λ についての最高次が n 次の多項式になります. すなわち

$$|A - \lambda I| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \tag{29}$$

例

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

なら

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{bmatrix}$$

で

$$|A - \lambda I| = (\alpha - \lambda)(\delta - \lambda) - \beta\gamma = \lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + \alpha\delta - \beta\gamma \tag{30}$$

です.

ここで (29) の λ の替わりに A を使った行列の式も

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = \mathbf{0} \tag{29$'$}$$

を充たします. $\mathbf{0}$ は要素が全て 0 の行列です.I は単位行列です. これをケイリー・ハミルトンの定理といいます.

実際,(30) のついて λ の替わりに A を使った式を調べると

$$A^2 - (\alpha + \delta)A + (\alpha\delta - \beta\gamma)I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{30$'$}$$

練習問題 8 (30') を確認してください.

以下この定理を証明します.

[ケーリー・ハミルトンの定理の証明]

[準備：余因子行列]

大学の 1 年次か高校時代, 行列の逆行列の話と一緒に, 余因子行列を習ったと思います.

$$S = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \cdots & S_{1,n} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \cdots & S_{2,n} \\ S_{3,1} & S_{3,2} & \cdots & S_{3,n} \\ & & \vdots & \\ S_{n,1} & S_{n,2} & \cdots & S_{n,n} \end{bmatrix} \tag{31}$$

について S の余因子行列 D は

$$D = \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{2,1} & \cdots & D_{n,1} \\ D_{1,2} & D_{2,2} & \cdots & D_{n,2} \\ D_{1,3} & D_{2,3} & \cdots & D_{n,3} \\ & & \vdots & \\ D_{1,n} & D_{2,n} & \cdots & D_{n,n} \end{bmatrix} \tag{32}$$

D_{ij} は S の第 j 行と第 i 列の要素を除いた $(n-1)$ 行 $(n-1)$ 列の部分行列式 $\times(-1)^{(i+j)}$ です.

例えば D_{21} は S の第 2 行と第 1 列の要素を除いた $(n-1)$ 行 $(n-1)$ 列の部分行列

$$\begin{bmatrix} S_{1,2} & \cdots & S_{1,n} \\ S_{3,2} & \cdots & S_{3,n} \\ & \vdots & \\ S_{n,2} & \cdots & S_{n,n} \end{bmatrix} \tag{33}$$

の行列式 $\times(-1)$ です.

例

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

なら A の余因子行列 B は

$$B = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

さて, S と S の余因子行列 D との積には

$$SD = |S|I$$

という関係があります. $|S|$ は S の行列式, I は単位行列です.

練習問題 9 上の, A と B の例について確認してください.

[定理の証明]

行列 $A-\lambda I$ の余因子行列を C とします．このとき C の i 行 j 列の要素は $A-\lambda I$ の第 j 行と第 i 列の要素を除いた $(n-1)$ 行 $(n-1)$ 列の部分行列式 $\times(-1)^{(i+j)}$ ですので λ についての最高次数 $(n-1)$ 次式です．これが $1 \leqq i, j \leqq n$ ついて成立っていますから, λ の各次数ごとに整理すると

$$C = \lambda^{n-1}C_{n-1} + \cdots + \lambda C_1 + C_0 \tag{34}$$

となります．

[例]

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{bmatrix}$$

の例では, これの余因子行列 C は

$$C = \begin{bmatrix} \delta-\lambda & -\beta \\ -\gamma & \alpha-\lambda \end{bmatrix}$$

で

$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

とおくと

$$C = \lambda C_1 + C_0$$

[例終わり]

さて, 行列とその余因子列の積＝行列式ですから

$$(A-\lambda I)C = |A-\lambda I|I$$

これに (29) 式

$$|A-\lambda I| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

(34) 式

$$C = \lambda^{n-1}C_{n-1} + \cdots + \lambda C_1 + C_0$$

を代入すると

$$\begin{aligned} &(A-\lambda I)\{\lambda^{n-1}C_{n-1} + \cdots + \lambda C_1 + C_0\} \\ &\quad = \{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\}I \end{aligned} \tag{35}$$

(35) 式の両辺の λ の次数を比較して,

$$
\begin{aligned}
-C_{n-1} &= I & (36)\\
AC_{n-1}-C_{n-2} &= a_{n-1}I & (37)\\
AC_{n-2}-C_{n-3} &= a_{n-2}I & (38)\\
AC_{n-3}-C_{n-4} &= a_{n-3}I &\\
&\vdots &\\
AC_1-C_0 &= a_1I & (39)\\
AC_0 &= a_0I & (40)
\end{aligned}
$$

(36) 式の両辺に A^nを

(37) 式の両辺に A^{n-1}を

(38) 式の両辺に A^{n-2}を

$\vdots$

(39) 式の両辺に A を

(40) 式の両辺に I を掛け, 辺々加えると,

$$0 = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I$$

[証明終わり]

この定理から,

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1A - a_0I$$

であり, A^n は $A^{n-1}, \cdots, A, I$ から計算できます. すると, 結局, A の n 以上のべき乗は,$A^{n-1}, \cdots, A, I$ から計算できることが判ります.

練習問題 10

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

について, 証明の議論をやってみてください.

9 不変部分空間

まず今までのお話のおさらいをします.

時不変な離散時間線形システムの状態方程式

$$\chi(k+1) = A\chi(k) + B\omega(k) \tag{5}$$

$$\eta(k) = C\chi(k) + D\omega(k) \tag{26}$$

について調べてきました.

初期点 $\chi(0)$ から $k=0$ から $k=n-1$ まで (5) 式の系に何らかの n 個の制御量 $\omega(0),\omega(1),\omega(2),\cdots,\omega(n-1)$ を加えた場合 $\chi(n)$ は

$$\chi(n)=A^n\chi(0)+\sum_{i=0}^{n-1}A^{n-1-i}B\omega(i) \tag{41}$$

となります.

$k=0$ から $k=n-1$ まで (5),(26) 式の系に何らかの n 個の制御量 $\omega(0),\omega(1),\omega(2),\cdots,\omega(n-1)$ を加えて任意の $\chi(0)$ から出発して $\chi(1),\chi(2),\cdots,\chi(n)$ と変化させ, 最後の $\chi(n)$ がある目標の χ_f と等しくなるようにできる場合, 系 (5),(26) は「(完全) 可制御」であるといいます. このための条件は

$$(5),(26)\text{ の系が可制御} \Longleftrightarrow Rank(G)=n$$

$$G=[A^{n-1}B,A^{n-2}B,\cdots,AB,B]$$

でした.

また, A,B,C,D と $\eta(0),\eta(1)\cdots,\eta(n-1),\omega(0),\cdots,\omega(n-1)$ から $\chi(0)$ を決定することができるというのが可観測性でした.

$$\text{この系が可観測} \Longleftrightarrow Rank(M)=n$$

ただし,

$$M=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

でした.

[ケーリー・ハミルトンの定理]

A の特性方程式を

$$|A-\lambda I|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

とするとき：

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=0 \tag{42}$$

が成立っていました.

以上が今までのおさらいです.

さて, そもそも制御性の条件は (41) 式を行列 G を使って

$$\chi(n)=A^k\chi(0)+G\Omega$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega(0) \\ \omega(1) \\ \omega(2) \\ \omega(3) \\ . \\ . \\ \omega(n-1) \end{bmatrix}$$

と変形し, 任意の $\mu, \nu \in R^n$ に対し $\mu = \chi(n), \nu = \chi(0)$ として $\chi(n) - A^n\chi(0) = G\Omega$ を充たす Ω が存在する条件を求めました.

$$(\forall \mu \in R^n)(\forall \nu \in R^n)(\exists \Omega \in R^{nm})$$

$$\{\mu = \chi(n)\ and\ \nu = \chi(0)\ and\ \chi(n) - A^n\chi(0) = G\Omega\}$$

上で,$\mu = 0$ にとった

$$(\forall \nu \in R^n)(\exists \Omega \in R^{nm})\{\nu = \chi(0)\ and\ - A^n\chi(0) = G\Omega\}$$

を可制御性

$\nu = 0$ にとった,

$$(\forall \mu \in R^n)(\exists \Omega \in R^{nm})\{\mu = \chi(n)\ and\ \chi(n) = G\Omega\}$$

を可到達性と言います. 可制御性は任意に与えられた初期点 $\chi(0)$ から原点へ動かせる Ω が存在するかどうか, 可到達性は原点から任意に与えられた点 $\chi(n)$ へ動かせる Ω が存在するかどうか, です.

以後, 議論を簡単にするため $|A| \neq 0$ とします. これは A^n の逆行列が存在することを意味し, この場合は, $\chi(n) = -A^n\chi(0)$ が解けることになり, 可制御性と可到達性は同値になります. 用語の解説は, 専門の教科書にお願いするとして, 今後, 可制御性 (=可到達性)

$$(\forall \mu \in R^n)(\exists \Omega \in R^{nm})\{\mu = \chi(n)\ and\ \chi(n) = G\Omega\}$$

を考察します. この場合も

$$(5), (26)\ \text{の系が可制御} \Longleftrightarrow Rank(G) = n$$

です.

[箸にも棒にもかからぬ]

これからが本題です. 可制御性や, 可観測性の条件が, 充たされない場合すなわち, $Rank(G) < n$ のときや $Rank(M) < n$ ときはどうなってしまうのか？ということです.

$Rank(G) < n$ の場合どんなに

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega(0) \\ \omega(1) \\ \omega(2) \\ \omega(3) \\ \cdots \\ \cdots \\ \omega(n-1) \end{bmatrix}$$

を選んでも $\chi(n)$ の選び方によっては

$$\chi(n) = G\Omega$$

が充たされないということが起きてしまいます. ($\chi(n)$ に到達できないわけです.)

「成せばなる, 成さねば成らぬ何事も, 成らぬは人の成さぬなり」　(クリントン前米国大統領も, 尊敬したという上杉鷹山) なんて言ってられなくなります.

$\chi(n)$ で, 系がこの $\chi(n)$ に, $\Omega \in R^{nm}$ を選べば到達できるものすなわち

$$\chi(n) = G\Omega$$

を充たす, Ω が存在するも全体を

$$\Lambda_c = \{\mu \in R^n | \exists\Omega \in R^{mn}, \mu = G\Omega\}$$

で定義します. 可制御部分空間なんて名前があるのですが, 箸にかかる要素の集合とでも呼びます.

可観測性の条件についても, 同様なことが起きます. そもそも可観測性の条件は, 既に判っている系の係数行列 A, B, C, D と系に加えた制御 $\omega(0), \cdots, \omega(n-1)$ とそれによる出力 $\eta(0), \eta(1), \cdots, \eta(n-1)$ から造られるベクトル P と M による方程式

$$M\chi(0) = P$$

が $\chi(0)$ について解けるかどうかの条件でした.

$Rank(M) < n$ の場合,$\nu \in R^n$ について $\chi(0) \neq 0$ で

$$M\chi(0) = 0$$

となることが起きます.

$$M_0 = 0$$

ですから $\chi(0)$ が 0 と区別できなくなります. このような ν の集合を,

$$\Lambda_{uo} = \{\nu \in R^n | M\nu = 0\}$$

で定義します. 不可観測部分空間などと呼ぶのですが, 棒にもかからない集合とでも呼びます.

系の方程式

$$\chi(k+1) = A\chi(k) + B\omega(k) \tag{5}$$

$$\eta(k) = C\chi(k) + D\omega(k) \tag{26}$$

は状態変数 χ の要素を４つに分け

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{cuo} \\ \chi_{co} \\ \chi_{ucuo} \\ \chi_{uco} \end{bmatrix}$$

と表現することにより, ４つのパーツに分解することができます. 「カルマンの分解」

10　不変部分空間

大学１年次の線形代数の時間に線形空間の部分空間の話を習ったと思います.

$$\Lambda_c = \{\mu \in R^n | \exists\Omega \in R^{mn}, \mu = G\Omega\}$$

$$\Lambda_{uo} = \{\nu \in R^n | M\nu = 0\}$$

は R^n の部分空間です.

[証明]

行列 G を

$$\Omega \in R^{nm} \overset{G}{\longmapsto} G\Omega \in R^n$$

という写像と見立てると,

$$\Lambda_c = G(R^{mn})$$

集合と写像の話をご存じの方なら

$$\Lambda_c = G(R^{mn}) = Im(G)$$

です.

$\mu_1, \mu_2 \in \Lambda_c$ と $a_1, a_2 \in R$ を任意にとると,

$$\mu 1 \in \Lambda_c \text{から}, \text{ある}\Omega_1 \in R^{mn}\text{が存在して}, \mu_1 = G\Omega_1$$

$$\mu 2 \in \Lambda_c \text{から}, \text{ある}\Omega_2 \in R^{mn}\text{が存在して}, \mu_2 = G\Omega_2$$

$$a_1\Omega_1 + a_2\Omega_2 \in R^{mn}$$

で

$$\begin{aligned} G(a_1\Omega_1 + a_2\Omega_2) &= a_1G\Omega_1 + a_2G\Omega_2 \\ &= a_1\mu_1 + a_2\mu_2 \end{aligned}$$

ゆえ

$$a_1\mu_1 + a_2\mu_2 \in \Lambda_c$$

従って

$$\Lambda_c = Im(G) \text{ は線形部分空間.}$$

［ Λ_c についての証明終り］

行列 M を

$$\nu \in R^n \quad \overset{M}{\longmapsto} \quad M\nu \in R^n$$

という写像と見立てると,

$$\Lambda_{uo} = M^{-1}(0)$$

これを M の核 $\ker(M)$ といいます.

$$\Lambda_{uo} = M^{-1}(0) = \ker(M)$$

練習問題 11

$Im(G)$ と同様にして,$\ker(M)$ が線形部分空間であることを示してください.

$\nu_1, \nu_2 \in \Lambda_{uo}$と $a_1, a_2 \in R$ を任意にとると

$$\nu_1 \in \Lambda_{uo}\text{から}, M\nu_1 = 0$$

$$\nu_2 \in \Lambda_{uo}\text{から}, M\nu_2 = 0$$

$$\begin{aligned} M(a_1\nu_1 + a_2\nu_2) &= a_1M\nu_1 + a_2M\nu_2 \\ &= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

ゆえ,

$$a_1\nu_1 + a_2\nu_2 \in \Lambda_{uo}$$

従って,

$$\Lambda_{uo}\text{は線形部分空間.}$$

————————————————————————————————————

行列 A を

$$\chi \in R^n \quad \overset{A}{\longmapsto} \quad A\chi \in R^n$$

という写像とみなすと

$$A(\Lambda_c) \subseteq \Lambda_c$$

$$A(\Lambda_{uo}) \subseteq \Lambda_{uo}$$

[証明]

$\chi \in \Lambda_c = Im(G)$ を任意にとると, ある $\Omega \in R^{mn}$ が存在して

$$\chi = G\Omega$$

両辺に A を作用させると

$$A\chi = AG\Omega$$

ここで

$$G = [A^{n-1}B, A^{n-2}B, \cdots, AB, B]$$

でしたから

$$\begin{aligned} AG\Omega &= A[A^{n-1}B, A^{n-2}B, \cdots, AB, B]\Omega \\ &= [A^nB, A^{n-1}B, \cdots, A^2B, AB]\Omega \end{aligned}$$

A^nB がでてきたので, やっとケーリー・ハミルトンの定理の出番です.

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0 \tag{42}$$

から

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1}\cdots - a_1A - a_0I$$

よって

$$A^nB = -a_{n-1}A^{n-1}B\cdots - a_1AB - a_0B \tag{43}$$

$[A^nB, A^{n-1}B, \cdots, A^2B, AB]$ と $G = [A^{n-1}B, A^{n-2}B, \cdots, AB, B]$ をみると, G の各部分行列を１つづつ右側へシフトして, 一番左の空いたところに A^nB を入れたものですから

$$[A^nB, A^{n-1}B, \cdots, A^2B, AB] = [A^{n-1}B, A^{n-2}B, \cdots, AB, B]\Lambda$$

ただし,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -a_{n-1}I & I & 0 & & & 0 \\ -a_{n-2}I & 0 & I & 0 & & 0 \\ -a_{n-3}I & 0 & 0 & I & & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ -a_0I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

結局

$$A\chi = AG\Omega = G\Lambda\Omega$$

$$\Lambda\Omega \in R^{nm}$$

よって

$$A\chi \in Im(G) = \Lambda_c$$

$\chi \in Im(G) = \Lambda_c$は任意にとったから

$$A(\Lambda_c) \subseteq \Lambda_c$$

練習問題 12

上と同様にして $A(\Lambda_{uo}) \subseteq \Lambda_{uo}$ を示してください.

11　カルマンの分解

[前節までのお話]

時不変な離散時間線形システムの状態方程式

$$\chi(k+1) = A\chi(k) + B\omega(k) \tag{5}$$

$$\eta(k) = C\chi(k) + D\omega(k) \tag{26}$$

について

(5), (26) の系が可制御 $\iff$ $Rank(G) = n$
(5), (26) の系が可観測 $\iff$ $Rank(M) = n$

$$G = \left[A^{n-1}B, A^{n-2}B, \cdots, AB, B\right]$$

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

ということが判りました. 次にこの可制御性や, 可観測性の条件が, 充たされない場合すなわち,$Rank(G) < n$ のときや $Rank(M) < n$ ときはどうなってしまうのか？ということを調べました.

その結果,

R^n の可制御部分空間

$$\Lambda\_c = I_m(G) = \{\mu \in R^n \mid \exists\Omega \in R^{mn}\mu = G\Omega\} \tag{44}$$

と, 不可観測部分空間

$$\Lambda_{uo} = Ker(M) = \{\upsilon \in R^n \mid M\upsilon = 0\} \tag{45}$$

という R^n の部分線形空間が定義されました.
さらに行列 A を

$$\chi \in R^n \overset{A}{\longmapsto} A\chi \in R^n$$

という写像とみなすと
$A(\Lambda_c) \subseteq \Lambda_c$
$A(\Lambda_{uo}) \subseteq \Lambda_{uo}$

ということが判りました.Λ_c と Λ_{uo} は A について不変であると言います.
さて, ここからが, この節の本題です.

以後 D = 0 とします.

まず　$\Lambda_{cuo} \quad = \quad \Lambda_c \bigcap \Lambda_{uo}$ とします.

Λ_c と Λ_{uo} はそれぞれ R^n の部分線形空間ですから Λ_{cuo} も部分線形空間です.

[証明]

$x, y \in \Lambda_{cuo}, \alpha, \beta \in R$ とすれば
$x, y \in \Lambda_c$　ゆえ $\alpha x + \beta y \in \Lambda_c$
$x, y \in \Lambda_{uo}$ ゆえ $\alpha x + \beta y \in \Lambda_{uo}$
よって
$\alpha x + \beta y \in \Lambda_c \bigcap \Lambda_{uo} = \Lambda_{cuo}$

[証明終り]

また
$A(\Lambda_{cuo})$
$= A(\Lambda_c \bigcap \Lambda_{uo})$
$\subseteq A(\Lambda_c) \bigcap A(\Lambda_{uo})$
$\subseteq \Lambda_c \bigcap \Lambda_{uo}$
$= \Lambda_{cuo}$

で Λ_{cuo} も A に対して不変.

$$A(\Lambda_{cuo}) \subseteq \Lambda_{cuo} \tag{46}$$

ここで, 線形代数のおさらいです.
ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

ベクトル $e_1, e_2, e_3, e_4, \cdots, e_n$ が一次独立
$\iff$　任意の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n \in R$ について
$\{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_n e_n =$ 0 ならば
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0\}$

$Span\{e_1, e_2, e_3, e_4, \cdots, e_n\}$
$= \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_n e_n | \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n \in R\}$
は $e_1, e_2, e_3, e_4, \cdots, e_n$ に実数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$
$\cdots, \alpha_n \in R$ をかけ足しあわせたもの全体の集合で, これ自身, 線形空間になっています

$e_1, e_2, e_3, e_4, \cdots, e_n \in R^n$ が R^n の基底
$\iff$　$e_1, e_2, e_3, e_4, \cdots, e_n$ が一次独立でかつ
$Span\ \{e_1, e_2, e_3, e_4, \cdots, e_n\} = R^n$

$X \subseteq R^n$ が部分線形空間

$\iff$　X の任意の元 $x,y\in X$ と任意の実数 $\alpha,\beta\in R$ について
$\alpha x+\beta y\in X$

$X\subseteq R^n$ が部分線形空間のとき R^n の基底 $e_1,e_2,e_3,e_4,\cdots,e_n\in R^n$
を選べば
$X=Span\{e_1,e_2,e_3,\cdots,e_k\}$　k を X の次元といい $dim(X)$ で表す.

X,Y が R^n の部分線形空間で $X\bigcap Y=\{0\}$　のとき
$X\oplus Y\quad=\{x+y\mid x\in X,y\in Y\}$
特に　R^n の基底 $e_1,e_2,e_3,e_4,\cdots,e_n\in R^n$ を選べば

$X=Span\{e_1,e_2,e_3,\cdots,e_k\}$　$k=dim(X)$
$Y=Span\{e_{k+1},e_{k+2},\cdots,e_{k+m+1}\}$　$m=dim(Y)$
とできる.

——————————————————おさらい終り——

[行列 A をスッキリさせる]
$\Lambda_c,\Lambda_{uo},\Lambda_{cuo}$ はそれぞれ R^n の部分線形空間で,
$\Lambda_{cuo}=\Lambda_c\bigcap\Lambda_{uo}$

ですから,R^n の基底 $e_1,e_2,e_3,e_4,\cdots,e_n$ を適当に選べば

$n_1=dim(\Lambda_{cuo})\Lambda_{cuo}$ の基底が n_1 個という意味です.
$n_1+n_2=dim(\Lambda_c)$
$n_1+n_3=dim(\Lambda_{uo})$

として, 下のように, 基底 $e_1,e_2,e_3,e_4,\cdots,e_n$ を配分できます.

可制御部分空間 Λ_c の基底 $e_1,e_2,e_3,\cdots,e_{n_1}$, $e_{n_1+1},e_{n_1+2},\cdots,e_{n_1+n_2}$
を可制御かつ不可観測な部分空間 Λ_{cuo} の基底 $e_1,e_2,e_3,\cdots,e_{n_1}$
と残りのベクトル $e_{n_1+1},e_{n_1+2},\cdots,e_{n_1+n_2}$(可制御かつ可観測)

不可制御部分空間 Λ_{uo} の基底 $e_1,e_2,e_3,\cdots,e_{n_1}$,　$e_{n_1+n_2+1},\cdots,e_{n_1+n_2+n_3}$
を可制御かつ不可観測な部分空間 Λ_{cuo} の基底 $e_1,e_2,e_3,\cdots,e_{n_1}$
と残りのベクトル $e_{n_1+n_2+1},\cdots,e_{n_1+n_2+n_3}$(不可制御かつ可観測)

上記以外のベクトル $e_{n_1+n_2+n_3+1,\cdots,e_n}$(不可制御かつ可観測)
すなわち

$$\Lambda_{cuo}=Span\{e_1,e_2,e_3,\cdots,e_{n_1}\} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_c&=Span\{e_1,e_2,e_3,\cdots,e_{n_1},e_{n_1+1},e_{n_1+2},\cdots,e_{n_1+n_2}\}\\&=Span\{e_1,e_2,e_3,\cdots,e_{n_1}\}\oplus Span\{e_{n_1+1},e_{n_1+2},\cdots,e_{n_1+n_2}\}\end{aligned}$$

$$\Lambda_{uo} = Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}, e_{n_1+n_2+1}, e_{n_1+n_2+2}, \cdots, e_{n_1+n_2+n_3}\}$$
$$= Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}\} \oplus Span\{e_{n_1+n_2+1}, e_{n_1+n_2+2}, \cdots, e_{n_1+n_2+n_3}\}$$

ここで

$$\Lambda_{co} = Span\{e_{n_1+1}, e_{n_1+2}, \cdots, e_{n_1+n_2}\} \tag{48}$$
$$\Lambda_{ucuo} = Span\{e_{n_1+n_2+1}, e_{n_1+n_2+2}, \cdots, e_{n_1+n_2+n_3}\} \tag{49}$$
$$\Lambda_{uco} = Span\{e_{n_1+n_2+n_3+1,\cdots,e_n}\} \tag{50}$$

とすれば

$$\Lambda_c = \Lambda_{cuo} \oplus \Lambda_{co} \tag{51}$$
$$\Lambda_{uo} = \Lambda_{cuo} \oplus \Lambda_{ucuo} \tag{52}$$
$$R^n = \Lambda_{cuo} \oplus \Lambda_{ucuo} \oplus \ \Lambda_{ucuo} \oplus \ \Lambda_{co} \tag{53}$$

となります.
またそれぞれの部分空間に A を作用させれば

$$A(\Lambda_{cuo}) \subseteq \Lambda_{cuo} \tag{46}$$

$$A(\Lambda_{ucuo}) \subseteq A(\Lambda_{uo}) \subseteq \Lambda_{uo} = \Lambda_{cuo} \oplus \Lambda_{ucuo} \tag{54}$$
$$A(\Lambda_{co}) \subseteq A(\Lambda_c) \subseteq \Lambda_{cuo} \oplus \Lambda_{co} \tag{55}$$
$$A(\Lambda_{uco}) \subseteq R^n = \Lambda_{cuo} \oplus \Lambda_{ucuo} \oplus \Lambda_{ucuo} \oplus \Lambda_{co} \tag{56}$$

です.
まず,

$$A(\Lambda_{cuo}) \subseteq \Lambda_{cuo} \tag{46}$$

と

$$\Lambda_{cuo} = Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n1}\} \tag{47}$$

に注目します.

$e_1 \in Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}\}$ ですから (13) 式により
$Ae_1 \in Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}\}$

すなわち, ある $y \in Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}\}$ が存在して
$Ae_1 = y$
となります.$Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}\}$ の定義からさらに
$\alpha_{11}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{n1}$ が存在して

$y = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \cdots + \alpha_{n1}e_{n_1}$ でしたから
$Ae_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \cdots + \alpha_{n1}e_{n_1}$

です. ここで $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}$ を並べた行列を $E_1 = [e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}]$
とし,
$\alpha_{11}, \alpha_{21}, \cdots, \alpha_{n1}$ を縦に並べた列ベクトルを α_1 で表せば

$E_1\alpha_1 = Ae_1$
です.
全く同様に $Ae_2 \in Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}\}$ ですから
$\alpha_{12}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{n2}$ が存在して
$Ae_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \cdots + \alpha_{n_2}e_{n_1}$
$\alpha_{12}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{n2}$ を縦に並べた列ベクトルを α_2 で表せば
$E_1\alpha_2 = Ae_2$
この操作を e_{n_1} まで繰り返せば,

$$E_1\Gamma_{11} = \quad AE_1 \tag{57}$$

ただし
$E_1 = [e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}]$
$\Gamma_{11} = [\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}]$

次に

$$\Lambda_{co} \quad = Span\{e_{n_1+1}, e_{n_1+2}, \cdots, e_{n_1+n_2}\} \tag{48}$$

$$\Lambda_{cuo} = Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n1}\} \tag{47}$$

$$A(\Lambda c\underline{o}) \quad \subseteq \Lambda_{cuo} \oplus \Lambda_{co} \tag{55}$$

について同様な操作により

$E_2 = [e_{n_1+1}, e_{n_1+2}, \cdots, e_{n_1+n_2}]$
$E_1 = [e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}]$
とすると

$$E_1\Gamma_{12} + E_2\Gamma_{22} = \quad AE_2 \tag{58}$$

$$\Lambda_{ucuo} = Span\{e_{n_1+n_2+1}, e_{n_1+n_2+2}, \cdots, e_{n_1+n_2+n_3}\} \tag{49}$$

$$\Lambda_{cuo} = Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}\} \tag{47}$$

$$A(\Lambda_{ucuo}) \subseteq \Lambda_{cuo} \oplus \Lambda_{ucuo} \tag{54}$$

について同様な操作により

$E_3 = [e_{n_1+n_2+1}, e_{n_1+n_2+2}, \cdots, e_{n_1+n_2+n_3}]$
とすると

$$E_1\Gamma_{13} + E_3\Gamma_{33} = AE_3 \tag{59}$$

最後に

$$\Lambda_{cuo} = Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}\} \tag{47}$$

$$\Lambda_{co} = Span\{e_{n_1+1}, e_{n_1+2}, \cdots, e_{n_1+n_2}\} \tag{48}$$

$$\Lambda_{ucuo} = Span\{e_{n_1+n_2+1}, e_{n_1+n_2+2}, \cdots, e_{n_1+n_2+n_3}\} \tag{49}$$

$$\Lambda_{uco} = Span\{e_{n_1+n_2+n_3+1}, \cdots, e_n\} \tag{50}$$

$$A(\Lambda_{uco}) \quad \subseteq R^n \quad = \Lambda_{cuo} \oplus \Lambda_{ucuo} \quad \oplus \Lambda_{ucuo} \oplus \Lambda_{co} \tag{56}$$

について

$E_4 = [e_{n_1+n_2+n_3+1}, \cdots, e_n]$

として

$$E_1\Gamma_{14} + E_2\Gamma_{24} + E_3\Gamma_{34} + E_4\Gamma_{44} = AE_4 \tag{60}$$

を得ます.

以上をまとめれば

$$E_1\Gamma_{11} = \quad AE_1 \tag{57}$$

$$E_1\Gamma_{12} + E_2\Gamma_{22} = AE_2 \tag{58}$$

$$E_1\Gamma_{13} + E_3\Gamma_{33} = AE_3 \tag{59}$$

$$E_1\Gamma_{14} + E_2\Gamma_{24} + E_3\Gamma_{34} + E_4\Gamma_{44} = AE_4 \tag{60}$$

ここで

$S = [E_1, E_2, E_3, E_4]$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 & \Gamma_{24} \\ 0 & 0 & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{44} \end{pmatrix}$$

とおくと

$s\Gamma = As$

$S = [E_1, E_2, E_3, E_4]$ は基底ベクトルを並べたものですから
$|S| \neq 0$ で逆行列 S^{-1} が存在します.
左から S の逆行列 S^{-1} をかければ
$S^{-1}AS = \Gamma$

[行列 B をスッキリさせる]

次に行列 B の各列を列ベクトルと見なして $B = [b_1, b_2, \cdots, b_{\mathrm{m}}]$ と書くと,

$G = \left[A^{(n-1)}B, A^{(n-2)}B, \cdots, AB, B\right]$

ですから

$$\Omega j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ J \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{j 番目}$$

とすると

$$b_j = G\Omega j$$

となり、各 j について

$$b_j \in Im(G) = \Lambda_c$$

が判ります。ここで

$$\Lambda_c = \Lambda_{cuo}(+)\Lambda_{co} \tag{61}$$

$$\Lambda_{co} = Span\{e_{n_1+1}, e_{n_1+2}, \cdots, e_{n_1+n_2}\} \tag{48}$$

$$\Lambda_{cuo} = Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}\} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= [e_{n_1+1}, e_{n_1+2}, \cdots, e_{n_1+n_2}] \\ E_1 &= [e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}] \end{aligned}$$

でしたから行列 A と全く同じ議論によって、

$$B = V_1 E_1 + V_2 E_2 \tag{62}$$

と書くことができ、

$$S = [E_1, E_2, E_3, E_4]$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$B = SV$$

$$S^{-1} B = V$$

が得られます。

[行列 C をスッキリさせる]

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ . \\ . \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

で、

$$\Lambda_{uo} = \ker(M) = \{\nu \in R^n | M\nu = 0\} \tag{63}$$

$$\Lambda_{uo} = Span\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n_1}\}(+)Span\{e_{n_1+n_2+1}, e_{n_1+n_2+2}, \cdots, e_{n_1+n_2+n_3}\}$$

ですから

$$\begin{aligned} &Me_1 = 0, Me_2 = 0, Me_3 = 0, \cdots, Me_{n_1} = 0 \\ &Me_{n_1+n_2+1} = 0, Me_{n_1+n_2+2} = 0, \cdots, Me_{n_1+n_2+n_3} = 0 \end{aligned}$$

です。従って、

$$
\begin{aligned}
&Ce_1 = 0, Ce_2 = 0, Ce_3 = 0, \cdots, Ce_{n_1} = 0 \\
&Ce_{n_1+n_2+1} = 0, Ce_{n_1+n_2+2} = 0, \cdots, Ce_{n_1+n_2+n_3} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_1 &= [e_1, e_2, e_3, \cdots, en1] \\
E_3 &= [e_{n_1+n_2+1}, e_{n_1+n_2+2}, \cdots, e_{n_1+n_2+n_3}]
\end{aligned}
$$

でしたから

$$
\begin{aligned}
CE_1 &= 0 \\
CE_3 &= 0
\end{aligned}
$$

これは

$$
\begin{aligned}
CS &= W \\
S &= [E_1, E_2, E_3, E_4]
\end{aligned}
$$

$$
W = [0, W_2, 0, W_4]
$$

となることを示しています。

以上をまとめると

「カルマンの分解」

系の方程式

$$
\chi(k+1) = A\chi(k) + B\omega(k) \tag{5}
$$

$$
\eta(k) = C\chi(k) \tag{26}
$$

について

$S = [E_1, E_2, E_3, E_4]$ とう変換行列が存在して

$$
\begin{aligned}
S^{-1}AS &= \Gamma \\
S^{-1}B &= V \\
CS &= W
\end{aligned}
$$

$$
\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma 11 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 & \Gamma_{24} \\ 0 & 0 & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_{44} \end{bmatrix}
$$

$$V=\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W=[0, W_2, 0, W_4]$$

という変換が可能なことが判りました。

系

$$\chi(k+1)=A\chi(k)+B\omega(k) \tag{5}$$

$$\eta(k)=C\chi(k) \tag{26}$$

系

$$\chi'(k+1)=\Gamma\chi'(k)+V\omega(k) \tag{5'}$$

$$\eta(k)=W\chi'(k) \tag{26'}$$

の $D=0$ としています。$\{\chi(k),\eta(k)\}$ と $\{\chi'(k),\eta(k)\}$ の間には

$$S^{-1}AS=\Gamma$$

$$S^{-1}B=V$$

$$CS=W$$

によって

$$S\chi'(k)=\chi(k)$$

と相互に変換できます。系 $(5'),(26')$ の挙動を調べれば、系 $(5),(26)$ の挙動が判ることになります。

$\chi'(k)$ を Γ 、V の形に合せて

$$\chi'(k)=\begin{bmatrix} \chi'_{cuo}(k) \\ \chi'_{co}(k) \\ \chi'_{ucuo}(k) \\ \chi'_{uco}(k) \end{bmatrix}$$

と分解します。

さらに $\chi'(k)$ の下半分に着目して

$$\chi'_{uc}(k)=\begin{bmatrix} \chi'_{ucuo}(k) \\ \chi'_{uco}(k) \end{bmatrix}$$

を造ると (1'), (2') から

$$\chi'_{uc}(k+1)=\Gamma_{uc}\chi'_{uc}(k)(1'u)$$

$$\Gamma uc=\begin{bmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ 0 & \Gamma_{44} \end{bmatrix}$$

という式が取り出せます。

$(1'u)$ の右辺には制御 $\omega(k)$ が作用する（作用させる）項がありません。従って、$\chi'_{uc}(k)$ にはいくら努力して制御 $\omega(k)$ を投じても効果なしということになります。箸にかからない。

次に

$$\eta(k)=W\chi'(k) \tag{26'}$$

$$W = [0, W_2, 0, W_4]$$

によって $\eta(k)$ が $\chi'(k)$ からでてくることになりますが

$$\eta(k) = W_2 \chi'_{co}(k) + W_4 \chi'_{uco}(k)$$

ですから、 $\chi'_{ucuo}(k)$ の項はでてきません。

$\chi'_{ucuo}(k)$ は出力 $\eta(k)$ から初期点の推測もできないわけです。棒にもかからないわけです。　結局 $\chi'_{ucuo}(k)$ は箸にも棒にもかからない。

[練習問題 13]

$$\chi'(k) = \begin{bmatrix} \chi'_{cuo}(k) \\ \chi'_{co}(k) \\ \chi'_{ucuo}(k) \\ \chi'_{uco}(k) \end{bmatrix}$$

の各要素について、上と同様に説明してください。

[練習問題 14]

$$E_1 \Gamma_{12} + E_2 \Gamma_{22} = A E_2 \tag{58}$$

$$E_1 \Gamma_{13} + E_3 \Gamma_{33} = A E_3 \tag{59}$$

$$E_1 \Gamma_{14} + E_2 \Gamma_{24} + E_3 \Gamma_{34} + E_4 \Gamma_{44} = A E_4 \tag{60}$$

を示して下さい。