集合の基礎的性質その１

師玉康成

目 次

第1章　記号論理

　この教材は数学や情報工学でよく使われる集合論の基礎事項についてまとめた資料です。
この章では記号論理について述べます。集合論を含む数学に限らず，情報工学でも少なくとも数理的な分野なら，記号論理の表現が頻繁に使われます。この章では記号論理，特に述語論理について，この資料を読むのに必要な配範囲で述べておきます。

1.1　記号表現

数学などの自然科学や工学の分野では，ニュートンヤライプニッツの積分記号のように, 事物や事物の性質を表すのに記号を用いてきました。
それらの歴史は, 考案され使われてきた記号の歴史といっても良いぐらいです。　集合論は「ものの集まり」である集合を扱いますが, 集合とその要素を表したり, 集合と集合, 集合と要素, 要素と要素の関係を表すのには記号を用います。この教材で用いる記号は以下のものです。

1. 集合やその要素を表す文字や数字これは例えば

$$A, B, \cdots, Z, a, b, c, \cdots, z, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \cdots, \Omega, \alpha, \beta, \cdots, \omega$$

$$0, 1, 2, 3, \cdots$$

   などです。

2. 集合と集合, 集合と要素, 要素と要素の関係を表す関係記号これには以下のような記号があります。

$$\begin{array}{ll} = & \text{「}\cdots\text{と}\cdots\text{は等しい」} \\ \leq & \text{「}\cdots\text{は}\cdots\text{より小さい」} \\ \in & \text{「}\cdots\text{は}\cdots\text{の要素」} \\ \subseteq & \text{「}\cdots\text{は}\cdots\text{の部分集合」} \end{array}$$

3. 論理記号

$$
\begin{array}{ll}
/ & \text{(あるいは } not\text{)「…でない」} \\
\wedge & \text{(あるいは } and\text{)「…かつ…」} \\
\vee & \text{(あるいは } or\text{)「…かつ…」} \\
\Rightarrow & \text{「…ならば…」} \\
\Leftrightarrow & \text{「…と…は同値」} \\
\forall & \text{「すべての…について…が成立つ」} \\
\exists & \text{「ある…が存在して…が成立つ」}
\end{array}
$$

4. 補助的な記号

$$
\begin{array}{l}
(,), [], \{,\} \\
\rightarrow, \mapsto, \cap, \cup, \prod
\end{array}
$$

集合や集合の性質を表すには, これらの記号は単独で使うのではなく,

$$x = y, x \in Y, X \subseteq Y$$

のように記号を並べた記号の列を用います。ここでは, その列を「式」と呼ぶことにします。

式には, 集合やその要素, すなわち何かの対象を表すものとして対象式があり,
また, それらの対象と対象の間の関係を表す関係式があります。関係式は論理式とも呼ばれます。対象式や関係式は以下のように組織的に作られます。
まず対象式は次の通りです。

1. 集合やその要素を表す文字は対象式。
2.

$$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \cdots, \mathcal{X}_n$$

が n 個の対象式のときそれらを要素として含む集合を表す

$$\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \cdots, \mathcal{X}_n\}$$

も対象式。

3. 関数の定義は後で述べますが,$\mathcal{F}$ が n 変数の関数を表し,

$$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \cdots, \mathcal{X}_n$$

が n 個の対象式のとき

$$\mathcal{F}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \cdots, \mathcal{X}_n)$$

も対象式。

4. R が関係式で x が R の中にでてくる文字のとき

$$\{x|x \in A \ and \ \mathcal{R}(x)\}$$

は対象式。

これら以外にも

$$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}, \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}, \prod \mathcal{F}$$

などがありますが, これらは, その定義と供に後の章で説明します。

関係式については以下の通りです。

1. $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が対象式のとき $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ は関係式
2. $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が対象式のとき $\mathcal{X} \leq \mathcal{Y}$ は関係式
3. $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が対象式のとき $\mathcal{X} \in \mathcal{Y}$ は関係式
4. $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が対象式のとき $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ は関係式
5. $\mathcal{P}$ が関係式なら $\neg\mathcal{P}$ も関係式 ($\mathcal{P}$ でないと読みます)
6. $\mathcal{P}$ が関係式なら $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ も関係式 ($\mathcal{P}$ かつ $\mathcal{Q}$ と読みます)
7. $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ が関係式なら $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ も関係式 ($\mathcal{P}$ または $\mathcal{Q}$ と読みます)
8. $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ が関係式なら $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ も関係式 ($\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{Q}$ と読みます)
9. $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ が関係式なら $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ も関係式 ($\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ は同値 と読みます)
10. $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ が関係式で,$\mathcal{X}$ が $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ の中に現われる文字, $\mathcal{Y}$ が対象式なら $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ も関係式
11. $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ が関係式で,$\mathcal{X}$ が $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ の中に現われる文字なら $(\forall\mathcal{X})\mathcal{P}(\mathcal{X})$ も関係式 (すべての $\mathcal{X}$ について $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ と読みます)

12. $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ が関係式で,$\mathcal{X}$ が $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ の中に現われる文字なら $(\exists\mathcal{X})\mathcal{P}(\mathcal{X})$ も関係式 (ある $\mathcal{X}$ が存在して $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ と読みます)

以上のような記号表現によって, 例えば
「すべての x について x が集合 A の要素ならば x は集合 B の要素である。」
といような主張を関係式として

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

と表現します。

さて, 数学や他の自然科学に限らず, 何らかの事物の性質や関係を論理的に捕らえようとすると

□□□□でない。
○○○○　ならば　□□□□です。
○○○○　かつ　　□□□□です。
○○○○　または　□□□□です。

とか

すべての△△について　□□□□である。(でない。)
ある△△について　　　□□□□でない。(でない。)

といった事物の性質を述べた記述が使われ，また既に判っている事柄，あるいは証明済みの事柄から，別の事柄を推理したり，証明したりするのに,三段論法と呼ばれる推論法

○○○○　ならば　□□□□である。
○○○○　であることは既に示した。
よって　□□□□です。

や，背理法と推論法

○○○○　でないと仮定しよう。
ところが, これを仮定すると□□□□でないと結論されるが,
これは既に証明されている□□□□であることと矛盾する。
よって　○○○○である。

が用いられてきました。

これらの，推論法,「ある事柄が正しいとを証明する方法」あるいは「既に正しいと証明されている事柄から新たな正しい事柄を導き証明する」方法，については古代ギリシャから研究され，その学問は論理学と呼ばれています。ユーグリッドの平面幾何学にも使われています。

論理学は数学，科学の発達と伴に発達してきました。近年，論理学に,前の節で述べたような記号による表現とともに,数学，特に代数学の手法が取り入れられ，記号論理学とか数理論理学と呼ばれる分野が生まれました。

これを概観しておきます。
例えば,
「x は 1 と等しくない。」という主張について考えてみましょう。これは,前節の記号表現を用いれば,関係式

$$not\ (x = 1)$$

で表現されます。そして，この関係式は,$x = 1$ の真か偽かによって偽になり,真になります。
また,「x が 1 と等しくかつ y は 1 と等しい」は,関係式

$$(x = 1)\ and\ (y = 1)$$

で表現されます。
この関係式は,$x = 1$ と $y = 1$ の両方が真のときだけ,真になります。同様に「$x = 1$ または $y = 1$ である。」という主張は

$$(y = 1)\ or\ (y = 1)$$

と表現されます。$x = 1$ と $y = 1$ のどちらか一方が真なら,真になります。
全ての対象 x が $x = 1$ という主張を表すには全称記号 $\forall$ を用いて

$$(\forall x)(x = 1)$$

という関係式を用います。記号 x が表す対象全体が例えば,

$$1, 2, 3, \cdots, 10$$

で与えられていれば

$$(1 = 1)\ and\ (2 = 1)\ and\ \cdots\ and\ (10 = 1)$$

と定義されるものです。そして,

$$(\forall x)(x = 1)$$

が真であるためには,

$$(1 = 1), (2 = 1), \cdots, \cdots (10 = 1)$$

が全て真である必要があり, 例えば $2 = 1$ は真ではないので, この関係式は真ではないということになります。
また, ある特定の対象 x が存在して $x = 1$ という主張を表すには存在記号 $\exists$ を用いて

$$(\exists x)(x = 1)$$

という関係式を使います。これも記号 x が表す対象全体が例えば,

$$1, 2, 3, \cdots, 10$$

で与えられていれば

$$(1 = 1) \ or \ (1 = 2) \ or \ \cdots \ or \ (10 = 1)$$

と定義されるものです。これが真であるためには

$$(1 = 1), (2 = 1), \cdots, \cdots (n = 1)$$

のどれか少なくとも一つが真であれば良いということになります。

1.1.1　真理値

ここで $x = 1$ という関係式を $\mathcal{P}$ で表すと, 上の 1 番目の関係式は

$$not \ \mathcal{P}$$

と書かれます。同様に

$$x = 1, y = 1$$

を $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ で表すと, 2 番目, 3 番目の関係式は

$$\mathcal{P} \ and \ \mathcal{Q}$$

$$\mathcal{P} \ or \ \mathcal{Q}$$

書かれます。このように具体的な $x=1, y=1$ の替わりに用いた $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ をメタ記号と言います。

$1=1$ や $0<1$ などの真な関係式を、その内容を無視して全て同じ物と見なし T で, 同様に $1=2$ や $2<1$ などの偽な関係式を全て同じ物と見なして F で表してみます。この T, F を真理値と呼びます。

すると $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ は真理値の集合 $\{T, F\}$ 上の変数と見ることができます。そのようにすると前述の関係式の真偽は $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ が $\{T, F\}$ のどの値をとるかによって決まる以下のような「代数的演算」によって決まることが判ります。

$not\ \mathcal{P}$ については

$$not\ T = F$$
$$not\ F = T$$

$\mathcal{P}\ and\ \mathcal{Q}$ については

$$T\ and\ T = T$$
$$T\ and\ F = F$$
$$F\ and\ T = F$$
$$F\ and\ F = F$$

$\mathcal{P}\ or\ \mathcal{Q}$ については

$$T\ or\ T = T$$
$$T\ or\ F = T$$
$$F\ or\ T = T$$
$$F\ or\ F = F$$

です。

1.1.2 恒真式

関係式

$$\mathcal{P}\ or \quad not \mathcal{P}$$

について考えてみます。これは $\mathcal{P}$ が $x = 1$ を表しているものとすれば

$$(x = 1)\ or\ not(x = 1)$$

という関係式を表しています。前項の or と not の真理値の計算結果を用いると $\mathcal{P}$ が T, F どちらの値をとっても

$$T\ or\ notT = T\ or\ F = T$$
$$F\ or\ notF = F\ or\ T = T$$

で恒に T となります。関係式

$$\mathcal{P}\ or\quad not\mathcal{P}$$

は、$\mathcal{P}$ が $x = 1$ などどのような関係式を表していようと, また, 真偽 T, F どちらであろうと, 恒に真 T となります。このように関係式には, 恒に真 T となるものがあり, これは恒真式と呼ばれます。恒真式は他にもあり例えば以下のものが知られています。

1. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$
2. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow [(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})]$
3. $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
4. $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
5. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow \{(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow [(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}]\}$
6. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}$
7. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$
8. $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \{(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow [\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})]\}$
9. $[\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})] \Rightarrow \mathcal{B}$
10. $[(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}] \Rightarrow [\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})]$
11. $(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{F}$
12. $[(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{F}] \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$
13. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{T}$
14. $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{A}$

15. $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$

これらは「命題論理」の公理と呼ばれているものですが, もし, 関係式が

$$(\forall\mathcal{X})(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$$

や

$$(\exists\mathcal{X})(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$$

のようなものを含んでいなければ, 前述の「代数的な演算」の規則

$$\begin{aligned} not\ T &= F \\ not\ F &= T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\ and\ T &= T \\ T\ and\ F &= F \\ F\ and\ T &= F \\ F\ and\ F &= F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\ or\ T &= T \\ T\ or\ F &= T \\ F\ or\ T &= T \\ F\ or\ F &= F \end{aligned}$$

に

$$\begin{aligned} T \ \Leftrightarrow\ T &= T \\ T \ \Leftrightarrow\ F &= F \\ F \ \Leftrightarrow\ T &= T \\ F \ \Leftrightarrow\ F &= T \end{aligned}$$

を加えたもので, 真理値 T, F 　が決定でき, その関係式が恒真式かどうかが判ります。

しかし,

$$(\forall x)(x = 1)$$

のような関係式はこのような方法では真理値 T, F を決めることができません。x が動く範囲が

$$1, 2, 3, \cdots, 10$$

のように有限ならばこの式は

$$(1 = 1)\ and\ (2 = 1)\ and\ \ \cdots,\ and\ (10 = 1)$$

と同じなので, 真理値は上の「代数的な演算」の規則で決定できますが, 一般には, x が動く範囲は無限個です。従って, 別の方法に拠らなければなりません。

1.1.3 推論

前項では真偽 T, F を決める代数的方法を見ましたが, これには「限界」がありました。

ここで, 中学校時代に習ったと思いますが, 三角形 ABC の内角の和が 180 °であることを示す平面幾何の証明を思い出しましょう。これを示すには例えば,

1. 問題の三角形底辺の底辺を BC として，それを右端点 C から適当な長さだけ右へ延長し端点を D としておく。
2. C を通り，斜辺 AB に平行な補助線を引く。これを CE とする。
3. 平行線と交差する直線と交わる角度についての性質から

$$\begin{aligned}
&\angle CAB = \angle ABE \\
&\angle ABC = \angle EBD \\
&\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle EBD + \angle BCA + \angle ABE \\
&\angle EBD + \angle BCA + \angle ABE = 180 \\
&\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180
\end{aligned}$$

によって内角の和が 180 °であることを「証明」しました。

この証明を記号で表現すれば,

1. CE は AB に平行。(公理)

$$AB//CE$$

2. 2 本の平行線と交わる直線がつくる 2 つの同位角は等しい。（公理）

$$(AB//CE) \Rightarrow (\angle ABC = \angle EBD)$$

3. 従って,$\angle ABC = \angle EBD$

$$\angle ABC = \angle EBD$$

4. 2 本の平行線と交わる直線がつくる 2 つの叉角は等しい。（公理）

$$(AB//CE) \Rightarrow (\angle CAB = \angle ABE)$$

5. 従って,$\angle CAB = \angle ABE$

$$\angle CAB = \angle ABE$$

6. 直線は 180 °である。（公理）

$$\angle EBD + \angle BCA + \angle ABE = 180$$

7. 等しい角度どうしを足し合わせても結果は等しい (公理)

$$\begin{aligned}&((\angle ABC = \angle EBD)\ and\ (\angle CAB = \angle ABE)\\&\Rightarrow\\&(\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle EBD + \angle BCA + \angle ABE)\end{aligned}$$

8. 結論

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180$$

という表現でしょう。これをさらにメタ記号を使って

$\mathcal{P}$ で $AB//CE$ を
$\mathcal{Q}$ で$\angle ABC = \angle EBD$ を
$\mathcal{R}$ で$\angle CAB = \angle ABE$ を
$\mathcal{S}$ で$\angle EBD + \angle BCA + \angle ABE = 180$ を
$\mathcal{T}$ で$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle EBD + \angle BCA + \angle ABE$
$\mathcal{W}$ で$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180$ を

表して, 詳しく記述すれば,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}\\
&\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\\
&\mathcal{Q}\\
&\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}\\
&\mathcal{R}\\
&\mathcal{Q}\ and\ \mathcal{R}\\
&\mathcal{Q}\ and\ \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{T}\\
&\mathcal{T}\\
&\mathcal{S}\\
&\mathcal{S}\ and\ \mathcal{T}\\
&\mathcal{S}\ and\ \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{W}\\
&\mathcal{W}
\end{aligned}$$

　となるでしょう。
１番目から 3 番目までの式を見ると

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\\
&\mathcal{P}\\
&\mathcal{Q}
\end{aligned}$$

という３段論法がでてきます。同様に 4 番目の式も

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}\\
&\mathcal{P}\\
&\mathcal{R}
\end{aligned}$$

という 3 段論法によっていることが判ります。
6 番目の式

$$\mathcal{Q}\ and\ \mathcal{R}$$

は例えば,

$$\mathcal{Q} \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow (\mathcal{Q}\ and\ \mathcal{R}))$$

という関係式が既に正しいものとして認められていれば,

$$\mathcal{Q} \Rightarrow (\mathcal{R} \Rightarrow (\mathcal{Q}\ and\ \mathcal{R}))$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{Q}\\&\mathcal{R} \Rightarrow (\mathcal{Q}\ and\ \mathcal{R})\\&\mathcal{R}\\&\mathcal{Q}\ and\ \mathcal{R}\end{aligned}$$

という 2 回の 3 段論法の適用によって与えられることが判ります。5 番目以降の式も同様です。

$$\begin{aligned}&\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\\&\mathcal{P}\\&\mathcal{Q}\end{aligned}$$

は $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ と記号 $\Rightarrow$ の前にある $\mathcal{P}$ から記号 $\mathcal{Q}$ を取り出す記号操作です。

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

と

$$\mathcal{P}$$

が前項で述べた恒真式なら

$$\mathcal{Q}$$

も恒真式になります。3 段論法などの操作の規則を推論規則と呼びますが, この推論規則を用いれば既に判っている真な関係式から新たに真な関係式を作り出すことができます。その推論規則を適用して, 関係式が導かれる過程を書いたものが「証明」です。

前節に挙げた, 少数の恒真式 (命題論理の公理) からも推論規則によって無数の恒真式を作り出すことができます。この方法なら, 関係式が

$$(\forall \mathcal{X})(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$$

や

$$(\exists \mathcal{X})(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$$

のようなものを含んでいても真偽を示すことができます。

関係式

$$(\forall x)(\mathcal{P}(x))$$

が正しいもと判っていれば, これの x に特定の対象, 例えば 1 などを代入して

$$\mathcal{P}(1)$$

が正しいことが判り,
　逆に,

$$P(1)$$

が正しいことが判っていれば,

$$(\exists x)(\mathcal{P}(x))$$

が正しいことが判りますので,

$$(\forall x)(\mathcal{P}(x))$$

や

$$(\exists \mathcal{X})(\mathcal{A}(\mathcal{X}))$$

などの関係式についての操作の規則を定めておけば, これらの関係式を含んだものについても, 真であることを示すことができます。このような規則としては他に, 例えば, 以下のものもあります。
　$(\forall \mathcal{X})\mathcal{P}(\mathcal{X})$,　$(\exists \mathcal{X})\mathcal{P}(\mathcal{X})$ は前節の式の定義を観ればわかるように何れの場合も,$\mathcal{X}$ は見かけ上の変数にすぎません。
そこで「関係式 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ の中に $\mathcal{Y}$ という変数が使われていなければ.

$$(\forall \mathcal{X})\mathcal{P}(\mathcal{X}) = (\forall \mathcal{Y})\mathcal{P}(\mathcal{Y})$$

$$(\exists \mathcal{X})\mathcal{P}(\mathcal{X}) = (\exists \mathcal{Y})\mathcal{P}(\mathcal{Y})$$

という書き換えができる」という規則を定めることができます。

　結局, 少数の自明とされる関係式あるは, 真と仮定するので証明不要とする関係式の集まり（これを公理と呼びます）と, それらを使って, 新たな「正しい」関係式を導き出す規則を定めておけば良いということが判ります。
　　以上のように記号論理学では, 対象にしている関係式（論理式とも言います）が正しい主張の内容を表しているかどうかを決定する方法や, 正しい論理式から別の正しい論理式を導く法則を研究します。
次にこの資料で用いるその公理について述べていきましょう。

1.2　公理系と推論規則

　　少数の証明不要の真と仮定する関係式の集まりは公理系と呼ばれます。公理系は幾つか知られていますがまず, この節では集合論に限らず, 数学理論に共通な公理系を述べておきます。述語論理の公理と呼ばれるものです

が, この資料では以下の公理系を用います。これらは 恒真式の集まりで, 他の恒真式もこれらから作り出すことができます。　この節の公理は前節で用いたメタ記号を使って書かれています, これらは不特定な関係式と対象式を表すのに用います。例えば $\mathcal{A}$ は具体的には $x \in Y$ や $x = 1$,$1 = 2$ などの関係式を表しています。また $\mathcal{S}$ には, 具体的には 1 や $\{\phi\}$ などを表します。

1. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$
2. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow [(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})]$
3. $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
4. $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
5. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow \{(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow [(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}]\}$
6. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}$
7. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$
8. $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \{(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow [\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})]\}$
9. $[\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})] \Rightarrow \mathcal{B}$
10. $[(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}] \Rightarrow [\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})]$
11. $(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{F}$
12. $[(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{F}] \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$
13. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{T}$
14. $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{A}$
15. $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$
16. $(\forall\mathcal{X})(\mathcal{A}(\mathcal{X})) \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S})$ (ただし $\mathcal{S}$ は対象式)
17. $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \Rightarrow (\exists\mathcal{X})(\mathcal{A}(\mathcal{S}))$ (ただし $\mathcal{S}$ は対象式)
18. $\mathcal{X} = \mathcal{Y}\ and \mathcal{A}(\mathcal{X}) \Rightarrow (\mathcal{A}(\mathcal{Y}))$ (ただし $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ は対象式で,y は $\mathcal{A}(\mathcal{X})$ の中に現われないものとします。)

これらを用いて, 新たな真である関係式を導くのですが, それは, 前節で述べたように, 関係式と呼ばれる記号列の操作規則を用いて行われます。その操作規則が推論規則と呼ばれるものです。

1.3　推論規則

以下の推論規則が用いられます。横線の上の関係式から下の**関係式**が導かれることを表わします。

$$(\exists x)\mathcal{P}(x, y)$$

の y のように $\forall$ や $\exists$ が作用していないものは自由変数と呼ばれます。

1. 三段論法
$$\frac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$

2. 全称化
$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}(a)}{\mathcal{A} \Rightarrow (\forall a)(\mathcal{B}(a))}$$
ただし a は自由変数記号で $\mathcal{A}$ には現れないものとします。

3. 特称化
$$\frac{\mathcal{A}(a) \Rightarrow \mathcal{B}}{(\exists a)(\mathcal{A}(a)) \Rightarrow \mathcal{B}}$$
ただし a は自由変数記号で $\mathcal{B}$ には現れないものとすします。

前述の**公理**自身もそうですが, 公理と, 上の推論規則を用いて導かれる関係式を**「証明可能な関係式」**, あるいは, **「定理」**, **「命題」**などと呼びます。またその導出の過程が**「証明」**です。

上の推論規則と公理を何回か適用する共通した手順を**「推論法則」**と呼びます。これ自身は, 公理系を扱うのに必須ではないですが, それを操作する上で便利な手続きをまとめたものです。以下に推論規則の例を述べます。

1. 添加
$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}} \qquad \text{(推論法則：添加)}$$
これは $\mathcal{A}$ が**証明可能な関係式**であるとき,(即ち**定理**であるとき) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ も証明可能, 即ち**定理**ですことを表しています。

2. 論理積
$$\frac{\mathcal{A}, \mathcal{B}}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}} \qquad \text{(推論法則：論理積)}$$
これは $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が**証明可能な関係式**であるとき, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ も証明可能ですことを表しています

以下, それぞれの規則意味の説明は省略します。

3. 論理積の交換

$$\frac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}} \quad (\textbf{推論法則：交換})$$

4. 論理和の交換

$$\frac{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}{\mathcal{B} \vee \mathcal{A}} \quad (\textbf{推論法則：交換})$$

5. ２重否定

$$\frac{\mathcal{A}}{\neg\neg A}, \quad \frac{\neg\neg A}{A}(\textbf{推論法則：２重否定})$$

6. 推移

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}}{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}}(\textbf{推論法則：推移})$$

7. 複推移

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}} \quad (\textbf{推論法則：復推移})$$

8. 対偶

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}} \quad (\textbf{推論法則：添加})$$

1.4 演繹定理, 全称化, 特称化

前節のような公理と推論規則の対は公理系と呼ばれます。前節の系を $\mathbf{H}$ で表すことにします。

関係式 $\mathcal{A}$ が**証明可能**であるとは，$\mathbf{H}$ において，公理系 $\mathbf{A}$ から $\mathcal{A}$ が**推論規**則によって導けることですから，これを

$$\vdash_H \mathcal{A}$$

と書きます。**推論規則**

$$\frac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$

はこの表記法を用いると，

$$\frac{\vdash_H \mathcal{A} \quad \vdash_{\mathcal{H}} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\vdash_H \mathcal{B}}$$

と書くべきです。しかし，煩雑さを避けるため, どの系で**証明可能**なのか明らかな場合は$\vdash_H$ は省略することにします。

1. 演繹定理は「推論規則」同様, 有用な道具を提供します。

演繹定理
公理系 H の公理に関係式

$$\mathcal{A}$$

を追加してできる新たな系で関係式 $\mathcal{B}$ が証明可能であるとき，このことを

$$\mathcal{A} \vdash_H \mathcal{B}$$

で表します。このとき：

$$\vdash_H (\forall a_1)(\forall a_2) \cdots (\forall a_l)\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$$

が成り立ちます。$a_1, a_2 \cdots a_l$ は $\mathcal{A}_n$ に現われる総ての自由変数記号とします。
特に, 関係式 $\mathcal{B}$ の中で,$a_1, a_2 \cdots a_l$ が $\forall$ で束縛されていない自由変数 [$(\forall a_i)$ のような記号がないという意味です。] ならば

$$\vdash_H \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$$

□
これから，**背理法**として知らる有用な道具が得られます。
背理法
ある関係式 $\mathcal{B}$ が存在して，

$$\neg\mathcal{A} \vdash_H \mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B}$$

ならば

$$\vdash_H \mathcal{A}$$

□
特に限定記号のある関係式については

$$(\exists x)(\neg\mathcal{A}(x)) \vdash_H \mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B}$$

ならば

$$\vdash_H (\forall x)(\mathcal{A}(x))$$

$$(\forall x)(\neg\mathcal{A}(x)) \vdash_H \mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B}$$

ならば

$$\vdash_H (\exists x)(\mathcal{A}(x))$$

また以下の推論規則も有用です。

2. 全称化
x が $\mathcal{A}(x)$ の自由変数であれば,

$$\frac{\mathcal{A}(x)}{(\forall x)\mathcal{A}(x)} \qquad \text{（推論法則：全称化）}$$

3. 特称化
c が特定の対象を表す対象定数記号とするとき,

$$\frac{\mathcal{A}(c)}{(\exists x)\mathcal{A}(x)} \qquad \text{（推論法則：特称化）}$$

定理
以上の，公理，推論法則を使えば次の諸定理を得ます。「定理」とは証明可能な関係式のことです。

(a) 関係式 $\mathbf{P}$ について

i. 任意の対象 a に対し

$$(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow \mathbf{P}(a)$$

は定理です。

ii. 任意の自由変数 a に対し $A \Rightarrow \mathbf{P}(a)$ が定理ならば

$$A \Rightarrow (\forall x)(\mathbf{P}(x))$$

(ただし A は任意の関係式)

も定理です。

iii. 任意の対象 a に対し

$$\mathbf{P}(a) \Rightarrow (\exists x)(\mathbf{P}(x))$$

は定理です。

iv. ある対象 a に対し

$$\mathbf{P}(a) \Rightarrow A$$

が定理ならば

$$(\exists x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow A$$
(ただし A は任意の関係式)

も定理です。

(b) 関係式 $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ について

i.

$$(\forall x)[\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)] \Leftrightarrow (\forall x)(\mathbf{P}(x)) \wedge (\forall x)(\mathbf{Q}(x))$$

は定理です。

ii.

$$(\exists x)[\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)] \Leftrightarrow (\exists x)(\mathbf{P}(x)) \vee (\exists x)(\mathbf{Q}(x))$$

は定理です。

(c)

i. 束縛変数を含む関係式 $\mathbf{Q}$ において，その束縛変数記号を $\mathbf{Q}$ に含まれない他の束縛変数記号でおきかえて得られます関係式を $\mathbf{G}$ とすれば,

$$\mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{G}$$

は定理です。 たとえば,

$$(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Leftrightarrow (\forall y)(\mathbf{P}(y))$$

$$(\exists x)(\mathbf{P}(x)) \Leftrightarrow (\exists y)(\mathbf{P}(y))$$

は定理です。

ii. 関係式 $\mathbf{Q}$ において，ひき続いて現れる同種の限定記号の順序を変更して得らる関係式を $\mathbf{G}$ とすれば,

$$\mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{G}$$

は定理です。
たとえば,

$$(\forall x)(\forall y)(\mathbf{P}(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(\mathbf{P}(x, y)),$$

$$(\exists x)(\exists y)(\mathbf{P}(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(\mathbf{P}(x, y))$$

は定理です。

iii.

$$(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow (\exists x)(\mathbf{P}(x))$$

は定理です。

iv.

$$(\exists y)(\forall x)(\mathbf{P}(x,y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\mathbf{P}(x,y))$$

は定理です。

(d) 関係式 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ について，以下は定理です。

i.

$$(\forall x)[\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x)] \Rightarrow [(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow (\forall x)(\mathbf{Q}(x))]$$

ii.

$$(\exists x)[\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x)] \Rightarrow [(\exists x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow (\exists x)(\mathbf{Q}(x))]$$

1.5 集合論の公理系

集合論では今まで述べた「述語論理の公理」に集合論の固有の公理が加わります。これらは, 述語論理の恒真式の集まりである公理と異なり, 真であると仮定する関係式です。

以下にそれを述べておきましょう。これは公理系 ZF(Zermero, Fraenkel の公理系）と呼ばれるものです。

1. 外延性の公理

$$(\forall X)(\forall Y)\{(\forall z)(z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y)\}$$

これは, 二つの集合 X, Y が「等しい」ことの定義を与えます。

2. 非順序対の対公理

$$(\forall a)(\forall b)(\exists Z)\{(\forall x)(x \in Z \Leftrightarrow (x = a \ or \ x = b))\}$$

これは, 二つの対象 a, b が与えらときに, これら要素からなる集合 $Z = \{a, b\}$ の存在することを示します。

3. 合弁の公理

$$(\forall \mathcal{F})(\exists \mathcal{Z})\left\{(\forall x)(x \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow (\exists W)(x \in W\ and\ W \in \mathcal{F})\right\}$$

これは例えば, 複数の集合の集合

$$\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3, \cdots X_n\}$$

が与えられたときに, これらの全ての合弁

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cdots \cup X_n$$

が存在することを示します。

4. 空集合の存在公理

$$(\exists X)(\forall y)(not\ (y \in X))$$

要素を一つも持たない集合の「存在」を意味します。そのような集合は, 後で説明しますが, 唯一ですので ϕ で表すことにします。

5. べき集合の公理

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall z)(z \in Y \Leftrightarrow z \subseteq X)$$

これは集合 X が与えられたときにその X の部分集合全体からなる集合の存在を示しています。そのような集合を X のべき集合と呼びます。例えば

$$X = \{0, 1, 2\}$$

のとき X のべき集合は

$$\{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

です。

6. 無限集合の存在公理

$$(\exists X)(Card(X) = Card(X) + 1)$$

7. 正則性の公理

$$(\forall X)(X \neq \phi \Rightarrow (\exists Y)(Y \in X and X \cap Y = \phi)$$

これは, 空でない集合で, それ自身の要素との共通部分が空でないというような「病的な集合」は存在しないということを意味します。

8. 選択公理

集合族 $\{P_i\}, i \in I$ について,

$$\prod_{i \in I} P_i = \{f \mid f : I \text{ から } \cup_{i \in I} P_i \text{への写像で、} (\forall \in I)\,(f(i) \in P_i)\}$$

について：

$(\forall i \in I)(P_i \neq \phi)$（総ての i について P_iが空集合でないという意味）

のとき,

$$\prod_{i \in I} P_i \neq \phi$$

集合論では以下の推論規則が追加されます。

9. 置換の推論規則

$$\frac{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\mathcal{P}(x,y)\ and\ \mathcal{P}(x,z) \Rightarrow y = z)}{(\forall A)(\exists B)\,\{(\forall y)(y \in B) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A\ and\ \mathcal{P}(x,y))\}}$$

ただし関係式 $\mathcal{P}(x,y)$ には B は現れないものとします。これは関係式 $\mathcal{P}(x,y)$ を用いて関数を定義するときなどに用います。

ただし関係式 $\mathcal{P}(x,y,z)$ には C は現れないものとします。

1.6 集合論での定理の証明

集合論などの数学的理論では 1.2 節の公理まで遡って, 定理の証明を記述することはあまりません。その記述では暗黙のうちに 1.2,1.3 節で述べた推論法則や, 演繹定理を使い, その推論がどの推論法則を使っているかでさえ, 明示しません。ここで, いくつか典型的な類例を挙げておきます。

1. 例えば,

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

を証明するには以下のようになります。

   (a) 先ず, 任意の対象（変数）記号 x を選ぶ。
   実際には,「x を任意にとる。」などと記述されます。

(b) $x \in A$ を仮定する。
これは今扱っている集合論の公理系（これを **ZF** としておきます。）に関係式 $x \in A$ を追加し,
以後この新しい公理系（これを $\mathbf{ZF} \cup x\{\in A\}$ としておきます。）で議論を意味します。

実際には,「$x \in A$ を仮定すると」などと書きます。

(c) $x \in B$ を示す。 これは,

$$\mathbf{ZF}, \{x \in A\} \vdash_H x \in B$$

意味します。

(d) (c) から演繹定理により,

$$\mathbf{ZF} \vdash_H (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$$

が示されます。

実際には,
「仮定 $x \in A$ により

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$$

」などと記述されます。

(e) (d) の結果について,(a) で x は任意に選択されているので自由変数であり, 推論規則「全称化」を適用します。
実際には,
「x は任意であったから

$$(\forall x)(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$$

」などと記述されます。

2.

$$(\exists x)(x \in A) \Rightarrow \mathbf{P}$$

を証明するには以下のようになります。**P** は何らかの関係式です。

(a) 先ず,$(\exists x)(x \in A)$ を仮定する。
実際には「$(\exists x)(x \in A)$ を仮定する。」などと記述されます。
これは今扱っている集合論の公理系に関係式 $(\exists x)(x \in A)$ を追加し, 以後この新しい公理系での議論を意味します。ぶ。

(b) c を $c \in A$ を充たす定数（対象定数記号）とする。
「c を $c \in A$ を充たす対象とする」などと書かれます。

(c) $\mathbf{P}$ を示す。

$$\mathbf{ZF}, (\exists x)(x \in A) \quad \vdash_H \mathbf{P}$$

意味します。

(d) (c) から演繹定理により,

$$\mathbf{ZF} \vdash_H (\exists x)(x \in A) \Rightarrow \mathbf{P}$$

が示されます。

実際には,
「仮定 $(\exists x)(x \in A)$ により

$$(\exists x)(x \in A) \Rightarrow \mathbf{P}$$

」などと記述されます。

第2章　集合の演算

記号 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ は左辺の関係式の意味が右辺の関係式で定義されることを表します。また記号 $:=$ は左辺が右辺で定義されることを表します。

2.1　包含関係

集合 A が集合 B に含まれることは

$$A \subseteq B \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

で定義します。

同様に集合 A が B に等しいことは外延性の公理で定義されています。再度書くと

$$A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

で定義します。

特に空集合についてはその存在公理

$$(\exists X)(\forall y)(not\ (y \in X))$$

からこような集合が 2 つあったとすると, それらを X_1, X_2 として

$$(\forall y)(not\ (y \in X_1)),\ (\forall y)(not\ (y \in X_2))$$

から

$$(\forall y)((y \in X_1) \Rightarrow (y \in X_2)),\ (\forall y)((y \in X_2) \Rightarrow (y \in X_1))$$

が成立ち,$X_1 = X_2$ となり, 一意性が成立っています。そこで, このような集合を ϕ で表します。

また, 任意の Y について

$$(\forall y)((y \in \phi) \Rightarrow (y \in Y))$$

から

$$(\forall Y)(\phi \subseteq Y)$$

以下の命題が成り立っています。

命題 2.1.1

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad A \subseteq A \\
&(2) \quad A \subseteq B \textit{ and } B \subseteq A \Rightarrow A = B \\
&(3) \quad A \subseteq B \textit{ and } B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C
\end{aligned}
$$

証明

(1)$A \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in A)$

右辺は恒真式　$\square$

(2)$A \subseteq B$ *and* $B \subseteq A$ とすると

$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ *and* $(\forall x')(x' \in B \Rightarrow x' \in A)$

$\therefore \quad \Rightarrow (\forall x')(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ *and* $(\forall x)(\forall x')(x' \in B \Rightarrow x' \in A)$

$\therefore \quad (\forall x)(\forall x')(x \in A \Rightarrow x \in B)$ *and* $(\forall x)(\forall x')(x' \in B \Rightarrow x' \in A)$

$\therefore \quad (\forall x)\{(\forall x')(x \in A \Rightarrow x \in B)$ *and* $(x' \in B \Rightarrow x' \in A)\}$

$\therefore \quad (\forall x)\{(x \in A \Rightarrow x \in B)$ *and* $(x \in B \Rightarrow x \in A)\}$

$\therefore \quad (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$\therefore \quad A \subseteq B$ *and* $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

$\therefore \quad A = B \quad \square$

(3)$A \subseteq B$ *and* $B \subseteq C$ とすると

$\therefore \quad (\forall x)\{(x \in A \Rightarrow x \in B)$ *and* $(\forall x')(x' \in B \Rightarrow x' \in C)\}$

$(\forall x)\{(x \in A \Rightarrow x \in B)$ *and* $(x \in B \Rightarrow x \in C)\}$

$\therefore \quad (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C)$

$\therefore \quad A \subseteq B$ *and* $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$\therefore \quad A \subseteq C \quad \square$

ラッセルのパラドクス

$\mathcal{P}(x)$ を x についての関係式とします。

$$\{x | \mathcal{P}(x)\}$$

で $\mathcal{P}(x)$ を充たす x すべての集合というの表現がよく用いられますが，これを不用意に用いると次のような問題が生じます。

病的な集合の定義 $\mathcal{P}(x)$ として $x \notin x$ をとります。

そして

$$N := \{x|x \notin x\}$$

とします。

1. N を $N \notin N$ とすると：N の定義により, この集合に属する条件を充たしますから,
$$N \in N$$
よって
$$N \in N \ and \ N \notin N$$
2. N を $N \in N$ とすると：再び,N の定義により, この集合に属するための条件により
$$N \notin N$$
よって
$$(N \in N) \ and \ (N \notin N)$$

公理から

$$N \in N \ or \ N \notin N$$

は恒に成立っていますから, 上の場合分けの方法によって,

$$N \in N \ and \ N \notin N$$

が成立ってしまいます。パラドクスが生じてしまいます。 ⋯ ラッセルのパラドックス

このラッセルのパラドックスを避けるにはどうしたらよいでしょうか？

一つの解決策は表記法 $\{x|Q(x)\}$ が認められるのは, 条件式

$$(\exists Y)(\forall x)(Q(x) \Leftrightarrow x \in Y)$$

が成立するときのみとすることです。

前の例において

$$\{X|X \notin X\}$$

が認められるとすると

$$(\exists Y)(\forall x)(x \notin x \Leftrightarrow x \in Y)$$

ここで

$$Y \notin Y \Leftrightarrow Y \in Y$$

は成り立たないので、矛盾が生じます。従って

$$\{X|X \notin X\}$$

は認められないというようにです。

関係式 $(\mathcal{P}(x,y)$ について

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\mathcal{P}(x,y)\ and\ \mathcal{P}(x,z) \Rightarrow y = z)$$

が成立つとき,

$(\exists x)(x \in A\ and\ \mathcal{P}(x,y)$ を $Q(y)$ とおけば

第 1 章で述べた置換の推論規則

$$\frac{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\mathcal{P}(x,y)\ and\ \mathcal{P}(x,z) \Rightarrow y = z)}{(\forall A)(\exists B)\left\{(\forall y)(y \in B) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A\ and\ \mathcal{P}(x,y))\right\}}$$

によって

$$(\exists B)(\forall y)(y \in B \Leftrightarrow Q(y))$$

が成立ち, この基準が充たされます。

よって

$$\{y|(\exists x)(x \in A\ and\ \mathcal{P}(x,y)\}$$

という集合を定義することができます。

(分出の定理)

関係式 $x \in A\ and\ \mathcal{Q}(x)$ についても,

$$\{x|x \in A\ and\ \mathcal{Q}(x)\}$$

という集合を定義することができます。

[証明]

関係式 $y = x\ and\ \mathcal{Q}(x)$ を $\mathcal{P}(x,y)$ とおけば

$$P(x,y), P(x,z)$$

のとき,

$$y = z$$

よって

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\mathcal{P}(x,y) \ and\ \mathcal{P}(x,z) \Rightarrow y = z)$$

よって,

$$(\exists B)\left\{(\forall y)(y \in B) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \ and\ \mathcal{P}(x,y))\right\}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
&(\exists x)(x \in A \ and\ \mathcal{P}(x,y)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \ and\ y = x \ and\ \mathcal{Q}(x)) \\
&\Leftrightarrow (yinA \ and\ \mathcal{Q}(y))
\end{aligned}$$

よって

$$(\exists B)(\forall y)(y \in B \Leftrightarrow (y \in A \ and\ \mathcal{Q}(y)))$$

が成立ちます。[**証明終**]

2.2 合弁と共通部分

以下、A, B, C などの集合は全てある集合 U の部分集合とします。

2.2.1 有限個の集合の演算

集合の合弁, 共通部分, 補集合は以下で定義されます。

定義：２つの集合の和, 積

$$\begin{aligned}
A \cup B &\overset{def}{=} \{x | x \in A \ or\ x \in B\} \\
A \cap B &\overset{def}{=} \{x | x \in A \ and\ x \in B\} \\
A' &\overset{def}{=} \{x | x \in U \ and\ x \notin A\}
\end{aligned}$$

非順序対の対公理

$$(\forall a)(\forall b)(\exists Z)\{(\forall x)(x \in Z \Leftrightarrow (x = a\ or\ x = b))\}$$

の公理により $\mathcal{F} = \{A, B\}$ の存在が保証され, さらに合弁の公理

$$(\forall \mathcal{F})(\exists \mathcal{Z})\{(\forall x)(x \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow (\exists W)(x \in W\ and\ W \in \mathcal{F})\}$$

により

$$\{x|x \in A\ or\ x \in B\}$$

の存在が保証され, 前節のラッセルのパラドックスを避けるための基準も充たされています。

また, 前節の分出の定理

$$(\exists B)(\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in A\ and\ \mathcal{P}(x))$$

によって関係式 $\mathcal{P}(x)$ を $x \in B$ とおけば

$$\{x|x \in A\ and\ x \in B\}$$

の存在が保証され

同様に, 関係式 $\mathcal{P}(x)$ を $x \notin A$, A に U を代入すれば

$$\{x|x \in U\ and\ x \notin A\}$$

の存在が保証され, 何れもパラドクス回避の基準が充たされています。

これらの定義の基に以下の命題群が成り立っています。

命題 2.2.1

$$A \cup B = B \cup A$$

証明

x を任意にとると

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A\ or\ x \in B$

$\Leftrightarrow x \in B\ or\ x \in A$

$\Leftrightarrow x \in B \cup A$

$\therefore\quad x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B \cup A$

$\therefore\quad x$ は任意にとってあるから

$(\forall x)(x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B \cup A)$

$\therefore\quad A \cup B = B \cup A \qquad \square$

命題 2.2.2

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

証明

x を任意にとると
$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \ or \ (x \in B \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in A \ or \ (x \in B \ or \ x \in C)$
$\Leftrightarrow (x \in A \ or \ x \in B) \ or \ x \in C$
$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \ or \ x \in C$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$
$\therefore \quad x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$
$\therefore \quad x$ は任意にとってあるから
$(\forall x)(x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad \square$

命題 2.2.3

$$A \cup A = A$$

証明

x を任意にとると
$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \ or \ x \in A$
$\Leftrightarrow x \in A$
$\therefore \quad x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A$
$\therefore \quad x$ は任意にとってあるから
$(\forall x)(x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A)$
$\therefore \quad A \cup A = A \qquad \square$

命題 2.2.4

$$A \cup \phi = A$$

証明

x を任意にとると

$x \in A \cup \phi \Leftrightarrow x \in A \ or \ x \in \phi$

$\Leftrightarrow x \in A$

$\therefore \quad x \in A \cup \phi \Leftrightarrow x \in A$

$\therefore \quad x$ は任意にとってあるから

$(\forall x)(x \in A \cup \phi \Leftrightarrow x \in A)$

$\therefore \quad A \cup \phi = A \qquad \square$

命題 2.2.5

$$A \cup U = U$$

証明

x を任意にとると

$x \in A \cup U \Leftrightarrow x \in A \ or \ x \in U$

$\Leftrightarrow x \in U$

$\therefore \quad x \in A \cup U \Leftrightarrow x \in U$

$\therefore \quad x$ は任意にとってあるから

$(\forall x)(x \in A \cup U \Leftrightarrow x \in U)$

$\therefore \quad A \cup U = U \qquad \square$

命題 2.2.6

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

証明

$A \subseteq B$ とすると定義から
$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$
定義から
$(\forall x)(x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A\ or\ x \in B)$
$\therefore\quad (\forall x)(x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B)$
$\therefore\quad A \cup B = B$
$\therefore\quad A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$
また $A \cup B = B$ とすると
$A \subseteq A \cup B$ だから $A \subset B$
$\therefore\quad A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
$\therefore\quad A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \qquad \square$

命題 2.2.7

$$A \cap B = B \cap A$$

証明

x を任意にとると
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A\ and\ x \in B$
$\Leftrightarrow x \in B\ and\ x \in A$
$\Leftrightarrow x \in B \cap A$
$\therefore$　任意の x について
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in B \cap A$
$\therefore\quad (\forall x)(x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in B \cap A)$
$\therefore\quad A \cap B = B \cap A \qquad \square$

命題 2.2.8

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

証明

x を任意にとると

$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \; and \; (x \in B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \; and \; (x \in B \; and \; x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \; and \; x \in B) \; and \; x \in C$

$\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \; and \; x \in C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

$\therefore$　任意の x について

$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

$\therefore \quad (\forall x)(x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C)$

$\therefore \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad \square$

命題 2.2.9

$$A \cap A = A$$

証明

x を任意にとると

$x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A \; and \; x \in A$

$\Leftrightarrow x \in A$

$\therefore$　任意の x について

$x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A$

$\therefore \quad (\forall x)(x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A)$

$\therefore \quad A \cap A = A \qquad \square$

命題 2.2.10

$$A \cap \phi = \phi$$

証明

x を任意にとると
$x \in A \cap \phi \Leftrightarrow x \in A \; and \; x \in \phi$
$\Leftrightarrow x \in \phi$
$\therefore$ 任意の x について
$x \in A \cap \phi \Leftrightarrow x \in \phi$
$\therefore \; (\forall x)(x \in A \cap \phi \Leftrightarrow x \in \phi)$
$\therefore \; A \cap \phi = \phi \qquad \square$

命題 2.2.11

$$A \cap U = A$$

証明

x を任意にとると
$x \in A \cap U \Leftrightarrow x \in A \; and \; x \in U$
$\Leftrightarrow x \in A$
$\therefore$ 任意の x について
$x \in A \cap U \Leftrightarrow x \in A$
$\therefore \; (\forall x)(x \in A \cap U \Leftrightarrow x \in A)$
$\therefore \; A \cap U = A \qquad \square$

命題 2.2.12

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

命題 2.2.12 の証明

$A \subseteq B$ とすると
$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$
定義より
$(\forall x)(x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \; and \; x \in B)$

$\therefore\quad (\forall x)(x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A)$

$\therefore\quad A \cap B = A$

$\therefore\quad A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

$A \cap B = A$ とすると

$A \cap B \subseteq B$

$A \subseteq B$

$\therefore\quad A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$

$\therefore\quad A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \qquad \square$

命題 2.2.13

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

証明

x を任意にとると

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A\ and\ (x \in B\ or\ x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A\ and\ x \in B)\ or\ (x \in A\ and\ x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore$　任意の x について

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore\quad (\forall x)(x \in A \cap (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C))$

$\therefore\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \square$

命題 2.2.14

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

証明

x を任意にとると

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A\ or\ (x \in B\ and\ x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A\ or\ x \in B)\ and\ (x \in A\ or\ x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\therefore$　任意の x について

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\therefore \quad (\forall x)(x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$$
$$\therefore \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad \Box$$

命題 2.2.15

$$(A')' = A$$

証明

x を任意にとると

$$x \in (A')' \Leftrightarrow x \in U \ and \ x \notin A'$$
$$\Leftrightarrow x \in U \ and \ not(x \in U \ and \ x \notin A)$$
$$\Leftrightarrow x \in U \ and \ not(x \notin U \ or \ x \in A)$$
$$\Leftrightarrow x \in U \ and \ x \in A$$
$$\Leftrightarrow x \in\in A$$

$\therefore$　任意の x について

$$x \in (A')' \Leftrightarrow x \in A$$
$$\therefore \quad (\forall x)(x \in (A')' \Leftrightarrow x \in A)$$
$$\therefore \quad (A')' = A \qquad \Box$$

命題 2.2.16

$$\phi' = U$$

証明

x を任意にとると

$$x \in \phi' \Leftrightarrow x \in U \ and \ x \notin \phi$$
$$\Leftrightarrow x \in U and not(x \in \phi)$$
$$\Leftrightarrow x \in U$$

$\therefore$　任意の x について

$$x \in \phi' \Leftrightarrow x \in U$$
$$\therefore \quad (\forall x)(x \in \phi' \Leftrightarrow x \in U)$$
$$\therefore \quad \phi' = U \qquad \Box$$

命題 2.2.17

$$A \cup A' = U$$

証明

x を任意にとると

$x \in A \cup A' \Leftrightarrow x \in A \ or \ x \in A'$

$\Leftrightarrow x \in U$

$\therefore$　任意の x について

$x \in A \cup A' \Leftrightarrow x \in U$

$\therefore$　$(\forall x)(x \in A \cup A' \Leftrightarrow x \in U)$

$\therefore$　$A \cup A' = U$　　□

命題 2.2.18

$$A \cap A' = \phi$$

証明

x を任意にとると

$x \in A \cap A' \Leftrightarrow x \in A \ and \ x \in A' \Leftrightarrow x \in \phi$

$\therefore$　任意の x について

$x \in A \cap A' \Leftrightarrow x \in \phi$

$\therefore \quad (\forall x)(x \in A \cap A' \Leftrightarrow x \in \phi)$

$\therefore \quad A \cap A' = \phi \qquad \square$

命題 2.2.19

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

証明

$A \subseteq B$ とすると定義より

$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$(\forall x)\{(x \notin U \ or \ x \in A) \Rightarrow (x \notin U \ or \ x \in B))\}$

$\therefore \quad (\forall x)\{(x \in U \ and \ x \notin B) \Rightarrow (x \in U \ and \ x \notin A)\}$

$\therefore \quad (\forall x)(x \in B' \Rightarrow x \in A')$

$\therefore \quad B' \subseteq A'$

$\therefore \quad A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

$B' \subseteq A'$とすると定義より

$(\forall x)(x \in B' \Rightarrow x \in A')$

$(\forall x)\{(x \notin U \ or \ x \in B') \Rightarrow (x \notin U \ or \ x \in A')\}$

$\therefore \quad (\forall x)\{(x \in U \ and \ x \notin A') \Rightarrow (x \in U \ and \ x \notin B')\}$

$\therefore \quad (\forall x)\{(x \in U \ and \ not(x \in U \ and \ x \notin A)) \Rightarrow (x \in U \ and \ not(x \in U \ and \ x \notin B))\}$

$\therefore \quad (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\therefore \quad A \subseteq B$

$\therefore \quad B' \subseteq A' \Rightarrow A \subset B$

$\therefore \quad A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A' \qquad \square$

命題 2.2.20

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

証明

x を任意にとると

$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \in U\ and\ x \notin A \cup B$

$\Leftrightarrow x \in U\ and\ not(x \in A\ or\ x \in B)$

$\Leftrightarrow x \in U\ and\ x \notin A\ and\ x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A'\ and\ x \in B'$

$\Leftrightarrow x \in A' \cap B'$

$\therefore$　任意の x について

$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$

$\therefore\quad (\forall x)(x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \in A' \cap B')$

$\therefore\quad (A \cup B)' = A' \cap B' \qquad \square$

命題 2.2.21

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

証明

x を任意にとると

$x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \in U\ and\ x \notin A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in U\ and\ not(x \in A\ and\ x \in B)$

$\Leftrightarrow x \in U\ and\ (x \notin A\ or\ x \notin B)$

$\Leftrightarrow x \in A'\ or\ x \in B'$

$\Leftrightarrow x \in A' \cup B'$

$\therefore$　任意の x について

$x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$

$\therefore\quad (\forall x)(x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \in A' \cup B')$

$\therefore\quad (A \cap B)' = A' \cup B' \qquad \square$

2.2.2 集合族の演算

第１章のべき集合の公理

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall z)(z \in Y \Leftrightarrow z \subseteq X)$$

によれば, 集合 U が与えられたときにその U の部分集合全体からなる集合の存在を示しています。そのような集合を U のべき集合と呼び,

$$\mathcal{B}(U) = \{Y | Y \subseteq U\}$$

と表します。Ω の部分集合

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(U)$$

は集語族と呼ばれますが, これの和と積は以下で定義されます。

定義：集合族の合弁と共通部分

$$\bigcup \mathcal{F} \overset{def}{=} \{x | x \in U \ and \ (\exists Y)(Y \in \mathcal{F} \ and \ x \in Y\}$$
$$\bigcap \mathcal{F} \overset{def}{=} \{x | x \in U \ and \ (\forall Y)(Y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in Y)\}$$

命題 2.2.22

$$\mathcal{F}' = \{Y' | Y \in \mathcal{F}\}$$

とするとき

$$(\bigcup \mathcal{F})' = \bigcap \mathcal{F}'$$

証明

x を任意にとると
$x \in (\bigcup \mathcal{F})' \Leftrightarrow x \in U \ and \ x \notin \bigcup \mathcal{F}$
$\Leftrightarrow x \in U \ and \ not\{x \in U \ and \ (\exists Y)(Y \in \mathcal{F} \ and \ x \in Y))\}$
$\Leftrightarrow x \in U \ and \ \{x \notin U \ or \ (\forall Y)(Y \notin \mathcal{F} \ or \ x \notin Y)\}$
$\Leftrightarrow x \in U \ and \ (\forall Y)(Y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \notin Y)$
$\Leftrightarrow x \in U \ and \ (\forall Y)(Y \in \mathcal{F} \Rightarrow (x \in U \ and \ x \notin Y))$
$\Leftrightarrow (\forall Y)(Y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in Y')$
$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\mathcal{F}}^{\prime}$

$$
\begin{aligned}
&\therefore\quad \text{任意の } x \text{ について} \\
&x \in (\bigcup \mathcal{F})' \Leftrightarrow x \in \bigcap \mathcal{F}' \\
&(\forall x)(x \in (\bigcup \mathcal{F})' \Leftrightarrow x \in \bigcap \mathcal{F}' \\
&\therefore\quad (\bigcup \mathcal{F})' = \bigcap \mathcal{F}' \qquad \square
\end{aligned}
$$

命題 2.2.23

$$\mathcal{F}' = \{Y' | Y \in \mathcal{F}\}$$

とするとき

$$(\bigcap \mathcal{F})' = \bigcup \mathcal{F}'$$

証明

$$
\begin{aligned}
&x \text{ を任意にとると} \\
&x \in (\bigcap_{\mathcal{F}})' \Leftrightarrow x \in U \ and \ x \notin \bigcap \mathcal{F} \\
&\Leftrightarrow x \in U \ and \ not\{x \in U \ and \ (\forall Y)(Y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in Y)\} \\
&\Leftrightarrow x \in U \ and \ not(\forall Y)(Y \notin \mathcal{F} \ or \ x \in Y) \\
&\Leftrightarrow x \in U \ and \ (\exists Y)(Y \in \mathcal{F} \ and \ x \notin Y) \\
&\Leftrightarrow (\exists Y)(Y \in \mathcal{F} \ and \ x \in U \ and \ x \notin Y) \\
&\Leftrightarrow (\exists Y)(Y \in \mathcal{F} \ and \ x \in Y') \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup \mathcal{F}' \\
&\therefore\quad \text{任意の } x \text{ について} \\
&x \in (\bigcap \mathcal{F})' \Leftrightarrow x \in \bigcup \mathcal{F}' \\
&\therefore\quad (\forall x)(x \in (\bigcap \mathcal{F})' \Leftrightarrow x \in \bigcup \mathcal{F}') \\
&\therefore\quad (\bigcap \mathcal{F})' = \bigcup \mathcal{F}' \qquad \square
\end{aligned}
$$

2.3　集合の差

集合の差は以下で定義されます。

定義：集合の差

$$A \setminus B = A \cap B'$$

以下の命題群が成り立ちます。

命題 2.3.1

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B')$$

証明

x を任意にとると

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \cap B')$

$\Leftrightarrow x \in A \ and \ x \notin B$

$\therefore \quad x \in A \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \ and \ x \notin (A \cap B)$

$\Leftrightarrow x \in A \ and \ (x \notin A \ or \ x \notin B)$

$\Leftrightarrow (x \in A \ and \ x \notin A) \ or \ (x \in A \ and \ x \notin B)$

$\Leftrightarrow x \in A \ and \ x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \qquad \square$

命題 2.3.2

$$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$$

証明

x を任意にとると

$x \in (A \cup B) \setminus B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \ and \ x \notin B$

$\Leftrightarrow (x \in A \ or \ x \in B)$

$and \ x \notin B$

$\Leftrightarrow (x \in A \ and \ x \notin B)$

$or \ (x \in B \ and \ x \notin B)$

$\Leftrightarrow x \in A \ and \ x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A \setminus B$

$\therefore$　任意の x について

$x \in (A \cup B) \setminus B \Leftrightarrow x \in A \setminus B$

$\therefore \quad (\forall x)(x \in (A \cup B) \setminus B \Leftrightarrow x \in A \setminus B)$

$\therefore \quad A \setminus B = (A \cup B) \setminus B \qquad \square$

命題 2.3.3

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

証明

x を任意にとると

$x \in (A \setminus B) \setminus C \Leftrightarrow (x \in A \setminus B)\ and\ x \notin C$

$\Leftrightarrow (x \in A\ and\ x \notin B)\ and\ x \notin C$

$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A)\ and\ x \notin (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A\ and\ x \notin B\ and\ x \notin C$

$\therefore$　任意の x について

$x \in (A \setminus B) \setminus C \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$　□

命題 2.3.4

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

証明

x を任意にとると

$x \in A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A\ and\ x \notin (B \setminus C)$

$\Leftrightarrow x \in A\ and\ not(x \in B\ and\ x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A\ and\ (x \notin B\ or\ x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A\ and\ x \in B)\ or\ (x \in A\ and\ x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

$\therefore$　任意の x について

$x \in A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$　□

命題 2.3.5

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$$

証明

$$\begin{aligned}
&x \text{ を任意にとると} \\
&x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow x \in A \cup B \ and \ x \notin C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \ or \ x \in B) \ and \ x \notin C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \ and \ x \notin C) \ or \ (x \in B \ and \ x \notin B) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \\
&\therefore \quad \text{任意の } x \text{ について} \\
&x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \qquad \square
\end{aligned}$$

命題 2.3.6

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

証明

$$\begin{aligned}
&x \text{ を任意にとると} \\
&x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \ and \ x \notin (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \ and \ (x \in B \ and \ x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \ and \ x \notin B) \ and \ (x \in A \ and \ x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \ and \ (x \in A \setminus C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\
&\therefore \quad \text{任意の } x \text{ について} \\
&x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad \square
\end{aligned}$$

2.4　排他和

集合の排他和は以下で定義されます。

定義：集合の排他和

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

この定義の基に以下の命題が成り立ちます。

命題 2.4.1

$$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$$

証明

$$
\begin{aligned}
&A\Delta(B\Delta C) = (A \setminus B\Delta C) \cup (B\Delta C \setminus A)\\
&= (A \setminus B\Delta C) \cup (B\Delta C \setminus A)\\
&= \{A \setminus (B \setminus C) \cup (C \setminus B)\} \cup \{(B \setminus C) \cup (C \setminus B) \setminus A\}\\
&= \{A \cap \{(B \cap C') \cup (C \cap B')\}'\} \cup \{\{(B \cap C') \cup (C \cap B')\} \cap\\
&\{A \cap \{(B(\cup C) \cap (C' \cup B)\}\} \cup \{(B \cap C' \cap A') \cup (C \cap B' \cap\}\\
&= \{A \cap \{(B' \cup C) \cap C' \cup (C' \cup C) \cap B\}\}\\
&= \{A \cap \{(B' \cap C') \cup (B \cap C)\} \cup \{(B \cap C' \cap A') \cup (C \cap B' \cap A)\}\\
&= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cup C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(A\Delta B)\Delta C = \{(A\Delta B) \setminus C\} \cup \{C \setminus (A\Delta B)\}\\
&= \{(A\Delta B) \cup (B \setminus A) \setminus C\} \cup \{C \setminus (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\}\\
&= \{((A \cap B') \cup (B \cap A')) \cap C'\} \cup \{C \cap \{(A \cap B') \cup (B \cap A')\}'\\
&= (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup \{C \cap \{(A' \cup B) \cap (A \cup B')\}\\
&= (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup \{C \cap \{A' \cap (A \cup B') \cup B \cup B')\}\}\\
&= (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup \{C \cap \{A' \cap B' \cup A \cap B\}\}\\
&= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)
\end{aligned}
$$

故に

$A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C \qquad \square$

命題 2.4.2

$$A\Delta\phi = A$$

証明

$$
\begin{aligned}
&A\Delta\phi = (A \setminus \phi) \cup (\phi \setminus A)\\
&= (A \cap \phi') \cup (\phi \setminus A')\\
&= A \cup \phi\\
&= A \qquad \square
\end{aligned}
$$

命題 2.4.3

$$A\Delta A = \phi$$

証明

$$\begin{aligned}
&A\Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A)\\
&= (A \cap A') \cup (A \cap A')\\
&= \phi \qquad \square
\end{aligned}$$

命題 2.4.4

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

証明

$$\begin{aligned}
&A \cap (B\Delta C) = A \cap \{(B \setminus C) \cup (C \setminus B)\\
&= \{A \cap (B \setminus C)\} \cup \{A \cap (C \setminus B)\}\\
&= \{A \cap (B \cup C')\} \cup \{A \cap (C \cup B')\}\\
&= \{(A \cap B) \cap C'\} \cup \{(A \cap C) \cap B'\}\\
&= (A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B)\\
&= (A \cap B \setminus A \cap B \cap C) \cup (A \cap C \setminus A \cap B \cap C)\\
&(A \cap B)\Delta(A \cap C) = (A \cap B \setminus A \cap C) \cup (A \cap C \setminus A \cap B)\\
&= (A \cap B \setminus A \cap B \cap C) \cup (A \cap C \setminus A \cap B \cap C) \qquad \square
\end{aligned}$$

2.5 順序対と直積集合

非順序対の対公理

$$(\forall a)(\forall b)(\exists Z)\,\{(\forall x)(x \in Z \Leftrightarrow (x = a\ or\ x = b))\}$$

に $a = \{x\}, b = \{x, y\}$ を適用して

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

という集合を造れます。

この集合を (x, y) と表すことにします。以下の性質が成立っています。

$$(\forall x)(\forall y)(\forall a)(\forall b)\{(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a\ and y = b\}$$

[証明] x, y, a, b を任意にとり,

$$(x, y) = (a, b)$$

とおくと, 定義から

$$\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

これから

$$\{x\} = \{a\}\ or\ \{x\} = \{a,b\}$$

$$\{x,y\} = \{a\}\ or\ \{x,y\} = \{a,b\}\}$$

$$\{x\} = \{a,b\}\ or \{x,y\} = \{a,b\}\}$$

$x \neq a$ とすると　$\{x\} \neq \{a\}$ よって　$\{x\} = \{a,b\}$ $a \in \{a,b\} = \{x\}$ より　$x = a$ となって仮定に矛盾よって $x = a$

$y \neq b$ とすると

$x \neq y$ なら $\{x,y\} \neq \{a\}$ から $\{x,y\} = \{a,b\}$ $y \in \{x,y\} = \{a,b\}$ で $y = a\ or\ y = b$ $y = a$ とすると $x = y$ となり矛盾。しかし,$y = b$ としても $y \neq b$ に矛盾よって $x = y$

$x = y$ から $\{y\} = \{a,b\}$ から $y = b$ となり矛盾

結局、$y = b$

[証明終]

(x,y) を順序対と呼びます。

直積集合の定義

$$\{z|(\exists x)(\exists y)(x \in X\ and\ y \in Y\ and\ z = (x,y))\}$$

という集合が定義できます。これを

$$X \times Y$$

で表し,X と Y の直積と呼びます。

[直積集合の存在証明]

$$\{x\} \in \mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{B}(X \bigcup Y), \{x,\ y\} \in \mathcal{B}(X \bigcup Y)$$

に注意すると

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(X \bigcup Y))$$

であり,
　関係式
$$(\exists x)(\exists y)(x \in X \ and \ y \in Y \ and \ z = (x, y))$$
を $\mathcal{P}(z)$ とおくと, 前節の分出の定理によって

$$(\exists C)(\forall z)(z \in B \Leftrightarrow z \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(X \bigcup Y)) \ and \ \mathcal{P}(z)))$$
であり, さらに,

$$z \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(X \bigcup Y)) \, and \, \mathcal{P}(z)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(x \in X \, and \, y \in Y \, and \, z = (x, y))$$

$$\{z|(\exists x)(\exists y)(x \in X \ and \ y \in Y \ and \ z = (x, y))\}$$
という集合が定義できます。[**証明終**]

[**命題 2.5.1**]

$$X, Y \neq \phi$$
$$A_1, A_2 \subset X$$
$$B_1, B_2 \subset Y$$
とすると以下が成り立つ。

1. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$

証明 (a) $(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$ を任意に選ぶと
$$(a, b) \in A_1 \times B_1$$
よって
$$a \in A_1 \ \ b \in B_1$$
同様にして $(a, b) \in A_2 \times B_2$ から
$$a \in A_2 \ \ b \in B_2$$
よって
$$a \in A_1 \cap A_2 \ \ b \in B_1 \cap B_2$$

よって

$$(a,b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

ゆえに任意の (a,b) について

$$(a,b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \Rightarrow (a,b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

逆に $(a,b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ を任意に選ぶと、これから

$$a \in A_1, b \in B_1 \quad (a,b) \in A_1 \times B_1$$

$$a \in A_2, b \in B_2 \quad (a,b) \in A_2 \times B_2$$

よって

$$(a.b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$$

すなわち任意の (a,b) について

$$(a,b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \Rightarrow (a,b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$$

2.

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) &= (A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) \\ &\quad \cup (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2) \\ &\quad \cup (A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \cap B_2)\end{aligned}$$

証明 (b) $(a,b) \in (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$ を任意に選ぶと；
$(a,b) \in A_1 \times B_1$ から $a \in A_1 \quad and \quad b \in B_1$
$(a,b) \notin A_2 \times B_2$ から $a \notin A_2 \; or \; b \notin B_2$
を得る。

$$\begin{aligned}a \in A_1 \; and \; b \in B_1 \quad &\Leftrightarrow \quad (a \in (A_1 \setminus A_2) \; or \; a \in A_1 \cap A_2) \\ &\qquad (b \in (B_1 \setminus B_2) \; or \; b \in B_1 \cap B_2)\end{aligned}$$

ゆえ

$$\begin{aligned}(a,b) \quad \in \quad & (A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) \\ & \cup (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B \setminus 2) \\ & \cup (A_2 \setminus A_2) \times (B_1 \cap B_2)\end{aligned}$$

となります。
逆も明か。