集合の基礎的性質その２－１

師玉康成

目 次

第1章　写像

1.1　写像の形式的定義

関数とか写像というのは，中学・高校時代から習っていています.
$f(x) = x^2$ とか $f(x) = \sin(x)$ です．x に x^2 を対応させる関数を $f(x)$ とする．
というように使うのですが，写像や関数は対象と対象を対応させる機能や規則を表していて，x とか x^2 と違い具体的な対象ではないようにみえます.
しかし，これも，数と同じように対象の一つとして扱います.
x から y への写像とか関数と呼ばれるものを数と同じように扱うことができるような定義を与えておきます．（これが唯一の方法ということではありません．）

材料は写像の定義域の集合 X，値域の集合 Y，それに X の要素 x に Y の要素 y を対応させる規則です.
X から Y への写像 (あるいは関数)f は形式的に

$$f = (G_f, X, Y)$$

という 3 重の対として定義されます.
G_f は写像 f のグラフと呼ばれます．これは,

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \ and \ y \in Y\}$$

の部分集合，つまり $G_f \subseteq X \times Y$ で，任意の $x \in X, y \in Y, z \in Y$ について　$(x, y) \in G_f, (x, z) \in G_f$　なら　$y = z$ になるものです.
また X, Y と G_f には

$$\{x | (\exists y)((x, y) \in G_f)\} = X$$
$$\{y | (\exists x)((x, y) \in G_f)\} \subseteq Y$$

が成り立つという条件を課します．f のグラフ G_f は，例えば $f(x) = x^2$ についてその曲線を座標に書くと判りますように曲線上の点 (x, x^2) 全ての

集合で文字通りグラフ r です.
以上の定義を記号論理で書けば

1.1.1 定義

$f = (G_f, X, Y)$ が X から Y への写像 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$
\begin{aligned}
&(G_f \subseteq X \times Y) \\
&\ and\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)\{(x, y) \in G_f\ and\ (x, z) \in G_f \Rightarrow y = z)\} \\
&and\ \{x|(\exists y)((x, y) \in G_f)\} = X \\
&and\ \{y|(\exists x)((x, y) \in G_f)\} \subseteq Y
\end{aligned}
$$

です.

「$f = (G_f, X, Y)$ が X から Y への写像」を簡単に「$f : X \to Y$ と書きます.」

[例]

$$f = (\{(a, 1), (b, 0), (c, 1)\}, \{a, b, c\}, \{1, 0\})$$

$$g = (\{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}, \{a, b, c\}, \{1, 0\})$$

$$h = (\{(a, 0), (b, 0), (c, 0)\}, \{a, b, c\}, \{1, 0\})$$

は何でも $\{a, b, c\}$ から $\{1, 0\}$ への写像です.

$$u = (\{(x, x^2)|x \in R\}, R, R)$$

は $f(x) = x^2$ で表される R から R への写像です.

$$v = (\{(x, \sin(x))|x \in R\}, R, R)$$

は $\sin(x)$ で知られる R から R への写像です.

任意の $x \in X$ について $(x, y) \in G_f$ となる $y \in Y$ は唯一つありますから,
この y を $f(x)$ で表します. $f(x)$ を要素 x の像といいます.

命題 3.1.1 $f : X \to Y$ について
(1)$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)((x, y) \in G_f \iff y = f(x))$
(2)$G_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$

問題
$X = \{a, b, c\}$
$Y = \{1, 0\}$
とするとき
(0)$X \times Y$ はどのような集合ですか?
(1)$G_f = \{(a, 1), (b, 0), (c, 1)\}$ は写像のグラフになっていますが,
$G_f = \{(a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 1)\}$ は写像のグラフになっていません.
理由を述べてください.

(2)$X \times Y$ の部分集合で写像のグラフになる G_f で条件

$$\{x | (\exists y)((x, y) \in G_f)\} = X$$

を満たすもの全てを列挙してください.

1.1.2　具体的な対応が与えられる写像

前節では,集合の直積を用いて写像を以下のように形式的に定義しました。
$f = (G_f, X, Y)$ が X から Y への写像 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$(G_f \subseteq X \times Y)$$
$$and\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)\{(x, y) \in G_f\ and\ (x, z) \in G_f \Rightarrow y = z)\}$$
$$and\ \{x | (\exists y)((x, y) \in G_f)\} = X$$
$$and\ \{y | (\exists x)((x, y) \in G_f)\} \subseteq Y$$

しかし, この定義では写像 f のグラフ G_f の具体的な構成法については述べられていません。例えば, 実数空間 $\mathbf{R}$ の元 x にその絶対値 $|x|$ を対応させる写像

$$x \in \mathbf{R} \mapsto |x| \in \mathbf{R}$$

を構成することを考えましょう。x には $x < 0$ のとき $-x$ が,$x \geq 0$ のとき x が一意に対応します。
関係式

$$(x \geq 0 \Rightarrow y = x)\ and\ (x0 \Rightarrow y = -x)$$

を $\mathcal{P}(x,y)$ とおくと

$$(\forall x)(\forall y)(\forall w)([\{x \in \mathbf{R}\ and\ y \in \mathbf{R}\ and\ (\mathcal{P}(x,y)\}$$
$$and\ \{x \in \mathbf{R}\ and\ y \in \mathbf{R}\ and\ \mathcal{P}(x,w)\}] \Rightarrow y = w)$$

が成立つます。第2章の議論により

$$\{z|(\exists x)(\exists y)(z = (x,y)\ and\ x \in X\ and\ y \in Y\ and\ \mathcal{P}(x,y)\}\}$$

という集合が定義できます。これが写像のグラフを定義していることを確かめるのは容易です。

一般に関係式

$$x \in X\ and\ y \in Y\ and\ \mathcal{P}(x,y)$$

について

$$(\forall x)(\exists y)(x \in X\ and\ y \in Y\ and\ \mathcal{P}(x,y))$$

と

$$(\forall x)(\forall y)(\forall w)([\{x \in X\ and\ y \in Y\ and\ (\mathcal{P}(x,y)\}$$
$$and\ \{x \in X\ and\ y \in Y\ and\ \mathcal{P}(x,w)\}] \Rightarrow y = w)$$

が成立つとき

$$\{z|(\exists x)(\exists y)(x \in X\ and\ y \in Y\ and\ z = (x,y)\ and\ \mathcal{P}(x,y)\}\}$$

という集合が定義でき, 写像のグラフを定義します。

1.1.3　集合族

集合 I から集合 Y のべき集合 $\mathcal{B}(Y) = \{Z|Z \subseteq Y\}$ へ写像

$$i \in I \mapsto X(i) \in \mathcal{B}(X)$$

を集合族とよび,

$$\{X_i\}_{i \in I}$$

で表します。I は特に添え字集合と呼ばれます。

$$\mathcal{F} = \{X_i|i \in I\}$$

とおけば,

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(Y)$$

で

$$\cup\mathcal{F}, \cap\mathcal{F}$$

などが定義できますが

$$\cup\mathcal{F} = \{x|(\exists i)(i \in I \ and \ x \in X_i)\}$$

$$\cap\mathcal{F} = \{x|(\forall i)(i \in I \ \Rightarrow \ x \in X_i)\}$$

となりますので

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x|(\exists i)(i \in I \ and \ x \in X_i)\}$$

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x|(\forall i)(i \in I \ \Rightarrow \ x \in X_i)\}$$

と定義します。

　また, 集合族とよび,

$$\{X_i\}_{i\in I}$$

多重積を

$$\prod_{i\in I} X_i := \{f|f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \ and \ (\forall i)(i \Rightarrow f(i) \in X_i)\}$$

で定義します。

　[命題 2.2.22] の集合族版

$$(\bigcup_{i\in I} X_i)' = \bigcap_{i\in I} X_i'$$

[証明]

x を任意にとると

$$x \in (\bigcup_{i\in I} X_i)' \Leftrightarrow x \in U \ and \ x \notin \bigcup_{i\in I} X_i$$

$$\Leftrightarrow x \in U \ and \ not\{x \in U \ and \ (\exists i)(i \in I \ and \ x \in X_i))\}$$

$$\Leftrightarrow x \in U \ and \ \{x \notin U \ or \ (\forall i)(i \notin I \ or \ x \notin Y)\}$$

$$\Leftrightarrow x \in U \ and \ (\forall i)(i \in I \Rightarrow x \notin X_i)$$

$$\Leftrightarrow x \in U \ and \ (\forall i)(i \in I \Rightarrow (x \in U \ and \ x \notin X_i))$$

$$\Leftrightarrow (\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i')$$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} X_i'$

$\therefore$　任意の x について

$x \in (\bigcup_{i \in I} X_i)' \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} X_i'$

$(\forall x)(x \in (\bigcup_{i \in I} X_i)' \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} X_i'$

$\therefore$　$(\bigcup_{i \in I} X_i)' = \bigcap_{i \in I} X_i'$　　□

[命題 2.2.23] の集合族版

$$X_i' = \{Y'|i \in I\}$$

とするとき

$$(\bigcap_{i \in I} X_i)' = \bigcup_{i \in I} X_i'$$

[証明]

x を任意にとると

$x \in (\bigcap_{i \in I} X_i)' \Leftrightarrow x \in U\ and\ x \notin \bigcap_{i \in I} X_i$

$\Leftrightarrow x \in U\ and\ not\{x \in U\ and\ (\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)\}$

$\Leftrightarrow x \in U\ and\ not(\forall i)(i \notin I\ or\ x \in X_i)$

$\Leftrightarrow x \in U\ and\ (\exists i)(i \in I\ and\ x \notin X_i)$

$\Leftrightarrow (\exists i)(i \in I\ and\ x \in U\ and\ x \notin X_i)$

$\Leftrightarrow (\exists i)(i \in I\ and\ x \in X_i')$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} X_i'$

$\therefore$　任意の x について

$x \in (\bigcap_{i \in I} X_i)' \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} X_i'$

$\therefore$　$(\forall x)(x \in (\bigcap_{i \in I} X_i)' \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} X_i')$

$\therefore$　$(\bigcap_{i \in I} X_i)' = \bigcup_{i \in I} X_i'$　　□

1.2　写像の像と逆像

さて，X の部分集合 $A \subseteq X$ について

$$\{y|y \in Y\ and\ (\exists x \in A)(y = f(x))\}$$

を $f(A)$ と表します．f による A の像と言います．また Y の部分集合 $V \subseteq Y$ について

$$\{x|x \in X \ and \ (\exists y \in V)(y = f(x))\}$$

を $f^{-1}(V)$ と表します．f による V の逆像と言います.
$f^{-1}(V)$ は f の逆写像の像の意味ではありません.

命題 3.1.1 $f(A)$ は以下のような別表現も可能です.

$$\begin{aligned}&f(A) = \{y|y \in Y \ and \ (\exists x \in A)(y = f(x))\}\\&= \{f(x)|x \in A\} = \{y|(\exists x \in A)((x,y) \in G_f\}\end{aligned}$$

同様に $f^{-1}(V)$ も

$$\begin{aligned}&f^{-1}(V) = \{x|x \in X \ and \ (\exists y \in V)(y = f(x))\}\\&= \{x|(\exists y \in V)((x,y) \in G_f)\}\end{aligned}$$

$f = (G_f, X, Y)$ が X から Y への写像のとき X のことを f の定義域といいます．$dom(f)$ とも書きます．$f(X)$ のことを f の値域といいます．$Rng(f)$ とも書きます.

$$f = (\{(x, x^2)|x \in R\}, R, R)$$

について

$$dom(f) = R, Rng(f) = \{y|y \in R \ and \ y \geq 0\}$$

$$f = (\{(x, \sin(x))|x \in R\}, R, R)$$

について

$$dom(f) = R, Rng(f) = \{y|y \in R \ and \ -1 \leq y \leq 1\}$$

問題
A と B を X の部分集合とします.
このとき $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ が成り立っています.
[証明]

実際，$y \in f(A \cap B)$ を任意にとると，$x \in A \cap B$ が存在して $y = f(x)$
これから $(\exists x \in A)(y = f(x))$ よって $y \in f(A)$
同様に
$(\exists x \in B)(y = f(x))$ よって $y \in f(B)$
以上から $y \in f(A \cap B)$.
y は任意でしたから $(\forall y)(y \in f(A \cap B) \Rightarrow f(A) \cap f(B))$
即ち $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

[証明終り]

(1) 上と同様にして $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ を示して下さい.
(2) また V, W を Y の部分集合とするとき

$$f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$$

$$f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$$

を示して下さい.

さらに、以下の命題が成立っています。

命題 3.1.2

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad f(\phi) = \phi \\
&(2) \quad f(X) \subseteq Y \\
&(3) \quad A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2) \\
&(4) \quad f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \\
&(5) \quad f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)
\end{aligned}
$$

証明

(1)　$f(\phi)$
$= \{y \mid (\exists x) \quad (x \in \phi \quad and \quad y = f(x)) \quad and \quad y \in Y\}$
$= \phi \qquad \Box$
(2)　$f(X)$
$= \{y \mid (\exists x)(x \in X \quad and \quad y = f(x)) \quad and \quad y \in Y\}$

$\subseteq Y \qquad \square$

(3) y を任意にとると

$y \in f(A_1) \Leftrightarrow (\exists x) \quad (x \in A_1 \quad and \quad y = f(x))$

$\Rightarrow (\exists x)(\quad x \in A_2 \quad and \quad y = f(x))$

$\Leftrightarrow y \in f(A_2)$

$\therefore$ 任意の y について

$y \in f(A_1) \Rightarrow y \in f(A_2)$

$\therefore \quad (\forall y) \quad (y \in f(A_1)) \Rightarrow y \in f(A_2))$

$\therefore \quad f(A_1) \subseteq f(A_2) \qquad \square$

(4) y を任意にとると

$y \in f(\bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad and \quad y = f(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(x \in X \ and \ (\exists i)(i \in I \quad and \quad x \in A_i) \quad and \quad y = f(x))$

$\Leftrightarrow (\exists i)(i \in I)(\exists x)(x \in A_i \quad and \quad y = f(x))$

$\Leftrightarrow y \in Y \ and \ (\exists i)(i \in I \quad and \quad y \in f(A_i))$

$\Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

$\therefore$ 任意の y について

$y \in f(\bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

$\therefore \quad (\forall y)(y \in f(\bigcup_{i \in I} A_i)) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

$\therefore \quad f(\bigcup_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

(5)

$y \in f(\bigcap_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad and \quad y = f(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(x \in X \ and \ (\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in A_i) \quad and \quad y = f(x))$

$\Rightarrow (\forall i)(i \in I \Rightarrow (\exists x)(x \in A_i \quad and \quad y = f(x)))$

$\Rightarrow (\forall i)(i \in I \Rightarrow y \in f(A_i))$

$\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

$\therefore$ 任意の y について

$y \in f(\bigcap_{i \in I} A_i) \Rightarrow y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

$\therefore \quad (\forall y)(y \in f(\bigcap_{i \in I} A_i)) \Rightarrow y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

$$\therefore \quad f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \square$$

同様に以下の命題が成り立ちます。

命題 3.1.3

$$(1) \quad f^{-1}(\phi) = \phi$$
$$(2) \quad f^{-1}(Y) = X$$
$$(3) \quad B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$$
$$(4) \quad f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$
$$(5) \quad f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$
$$(6) \qquad f^{-1}(B') = f^{-1}(B)'$$

証明

$$(1) \quad f^{-1}(\phi)$$
$$= \{x \mid (x \in X) \quad and \quad (\exists y \in \phi)(y = f(x))\}$$
$$= \phi \qquad \square$$
$$(2) \quad f^{-1}(Y)$$
$$= \{x \mid (x \in X) \quad and \quad (\exists y \in Y)(y = f(x))\}$$
$$= X \qquad \square$$
$$(3) \quad x \in f^{-1}(B_1)$$
$$\Leftrightarrow (\exists y \in B_1)(y = f(x))$$
$$\Rightarrow (\exists y \in B_2)(y = f(x))$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_2)$$
$$\therefore \quad x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_2)$$
$$\therefore \quad (\forall x)(x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_2))$$
$$\therefore \quad f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2) \qquad \square$$

(4)　x を任意にとると

$$x \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$$
$$\Leftrightarrow (\exists y)(y \in \bigcup_{i\in I} B_i \ and \ y = f(x))$$
$$\Leftrightarrow (\exists y)(y \in Y \ and \ (\exists i)(i \in I \ and \ y \in B_i \ and \ y = f(x)))$$
$$\Leftrightarrow (\exists i)(i \in I \ and \ (\exists y)(y \in B_i \ and \ y = f(x)))$$

$\Leftrightarrow x \in X\ and\ (\exists i)(i \in I\ and\ x \in f^{-1}(B_i))$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

$\therefore$　任意の x について

$x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i)$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

$\therefore \quad (\forall x)(x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i))$

$\therefore \quad f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

(5)

$x \in f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(y \in \bigcap_{i \in I} B_i\ and\ y = f(x))$

$\Leftrightarrow (\exists y)(y \in Y\ and\ (\forall i)(i \in I \Rightarrow y \in B_i)\ and\ y = f(x))$

$\Rightarrow x \in X\ and\ (\forall i)(i \in I \Rightarrow (\exists y)(y \in B_i\ and\ y = f(x))$

$\Rightarrow x \in X\ and\ (\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in f^{-1}(B_i))$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

$\therefore$　任意の x について

$x \in f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

$\therefore \quad (\forall x)(x \in f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

$\therefore \quad f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

(6)

$x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in X\ and\ (\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in f^{-1}(B_i))$

$\Rightarrow x \in X\ and\ (\forall i)(i \in I \Rightarrow (\exists y_i)(y_i = f(x)\ and\ y_i \in B_i))$

$\Rightarrow f(x) \in Y\ and\ (foralli)(i \in I \Rightarrow f(x) \in B_i) \Rightarrow f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i)$

$\therefore$　任意の x について

$$x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) \Rightarrow x \in f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i)$$

$$\therefore \quad (\forall x)(x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)) \Rightarrow x \in f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i)$$

$$\therefore \quad \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i)$$

$$\therefore \quad \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) \qquad \square$$