集合の基礎的性質その２－２

師玉康成

目 次

第1章　単射, 全射

　写像 $f : X \to Y$ について
「任意の X の要素 x, w について, $f(x) = f(w)$ ならば $x = w$」を満たすとき f は一対一 ($one - to - one$ または単射) であるといいます.

「f が一対一」$\iff$ $(\forall x \in X)(\forall w \in X)(f(x) = f(w) \Rightarrow x = w)$

$f(X) = Y$ を満たすとき f は全射 ($onto$)(または Y の上への写像) であるといいます.
「f が全射」$\iff$ $f(X) = Y$

f が単射かつ全射であるとき双射 (または全単射) といいます.

問題
(1)$X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ とします.
$f = (\{(a, 0), (b, 1), (c, 2)\}, \{a, b, c\}, \{0, 1, 2, 3\})$ は単射の例ですが，他の例を作っ下さい.

$X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1\}$ とします.
$f = (\{(a, 0), (b, 1), (c, 1)\}, \{a, b, c\}, \{0, 1\})$ は全射の例ですが，他の例を作っ下さい.

(2)A と B を X の部分集合とします．写像 $f : X \to Y$ が単射のとき
$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ を示して下さい.

以上を命題としてまとめておきます.

　[命題 3.2.1]

　$f : X \to Y$ のとき

(1)A と B が X の部分集合なら

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

特に f が単射なら

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

(2)V, W が Y の部分集合

$$f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$$

$$f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$$

1.1 逆写像

写像 $f : X \to Y$ が全単射 (双射) のとき:$f = (G_f, X, Y)$ について，
$G_f^{(-1)} = \{(y, x) | (x, y) \in G_f\}$ とおき $f^{-1} = (G_f^{-1}, Y, X)$ とすると，これは Y から X への写像を定義しています．しかもこれは全単射 (双射) です．
実際，$G_f \subseteq X \times Y$ でしたから，$G_f^{-1} \subseteq Y \times X$ です．
また，任意の $y \in Y, x, w \in X$ をとり $(y, x) \in G_f^{(-1)}, (y, w) \in G_f^{-1}$ とすると,$(x, y) \in G_f, (w, y) \in G_f$ であり, これから $y = f(x), y = f(w)$ となり，これから f が全単射 (双射) である条件によって $x = w$ すなわち G_f^{-1} は写像のグラフの定義を満たしています.
$f(X) = Y$ からは,

$$\{y | (\exists x)((y, x) \in G_f^{-1})\} = \{y | (\exists x)((x, y) \in G_f)\} = f(X) = Y$$

が成り立っています．また $\{x | (\exists y)((y, x) \in G_f^{-1})\} = X$ も満たされています．以上から $f^{-1} = (G_f^{-1}, Y, X)$ は写像です.
また，任意の Y の要素 y, z について $f^{-1}(y) = f^{-1}(z)$ ならば,
$y = f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(z)) = z$ です.

さらに Y の f^{-1} による像
$f^{-1}(Y) = \{x | x \in X \ and \ (\exists y \in Y)(x = f^{-1}(y))\}$
$= \{x | x \in X \ and \ (\exists y)((x, y) \in G_f)\}$
$= X$
も成り立ちます.

$f = (\{(a,0),(b,1),(c,2)\},\{a,b,c\}\{0,1,2\})$ は双射です.
このとき

$$f^{-1} = (\{(0,a),(1,b),(2,c)\},\{0,1,2\},\{a,b,c\})$$

問題
$X = \{a,b,c\}$, $Y = \{0,1,2\}$ とします．このとき双射を全て列挙して下さい．いくつあるでしょうか?
注意
$f = (\{(a,0),(b,1),(c,2)\},\{a,b,c\}\{0,1,2\})$ と
$g = (\{(c,2),(a,0),(b,1)\},\{a,b,c\}\{0,1,2\})$ などは同じ写像と見なします.

1.2　写像の合成

X から Y への写像 $f = (G_f, X, Y)$ と Y から Z への写像 $g = (G_g, Y, Z)$ について $G_g \cdot G_f = \{(x,z)|(\exists y)((x,y) \in G_f\ and\ (y,z) \in G_g)\}$ として $h = (G_g \cdot G_f, X, Z)$ とおくと,h は X から Z への写像です．これを $g \cdot f$ で表します.
$(\forall x \in X)(g \cdot f(x) = g(f(x)))$ が成り立っています.

例
$f = (\{(a,0),(b,1),(c,0)\},\{a,b,c\},\{0,1\})$
$g = (\{(0,p),(1,q)\},\{0,1\},\{p,q,r\})$
のとき
$g \cdot f = (\{(a,p),(b,q),(c,p)\},\{a,b,c\},\{p,q\})$
$u = (\{(x,2x)|x \in R\},R,R)$
$v = (\{(y,\sin(y))|y \in R\},R,[-1,1])$
のとき
$g \cdot f = (\{(x,\sin(2x))|x \in R\},R,[-1,1])$

問題
(1)$X = \{a,b,c\}$, $Y = \{0,1,2\}$, $Z = \{p,q\}$ とします．このとき合成写像の列を作ってください.

(2)$f : X \to Y, g : Y \to Z$ について以下を示して下さい.

f, g が単射　ならば $g \cdot f$ 　も単射
f, g が全射　ならば $g \cdot f$ 　も全射

[恒等写像]
X から X への全単射 f で $(\forall x \in X)(f(x) = x)$ となるものを恒等写像と呼び id_X で表します.

$$id_X = (G_{id_X}, X, X)$$

$$G_{id_X} = \{(x, x) | x \in X\}$$

問題
$f : X \to Y, g : Y \to X$ について以下を示して下さい.
(1)$g \cdot f = id_X$ ならば f は単射で g は全射
(2)$g \cdot f = id_X$ かつ $f \cdot g = id\underline{Y}$ ならば f, g は双射で $g = f^{-1}$

以下の命題が成立っています。

命題 3.3.1

$$f, g, h : X \to X$$

のとき，写像の合成については結合律

$$f(gh) = (fg)h$$

が成り立つ。

証明

$$\begin{array}{rcl} \text{任意の } x \in X \text{ をとる} & & \\ f(gh)(x) & = & f(gh(x)) \\ & = & f(g(h(x))) \\ & = & (fg)(h(x)) \\ & = & (fg)h(x) \\ \text{よって} & & \\ (\forall x)(fg(h)(x) & = & (fg)h(x)) \end{array} \quad \square$$

命題 3.3.2 $f : X \to X$ のとき

$$f\ i_X = i_X\ f$$

証明

$$\begin{array}{rcl}(\forall x)(x \in X & \Rightarrow & f\ i_X(x) \\ & = & f(x) \\ & = & i_X\ f(x)) \qquad \square\end{array}$$

命題 3.3.3 f が 単射 , 全射 であれば f^{-1} が存在して

$$f\ f^{-1} = f^{-1}\ f = i_X$$

となります。

逆写像と証明 (1) f^{-1} の存在性これには, 先ず f_G^{-1} が関数のグラフになることを示せばよい。

$$y \in X$$

とおく。f が 全射 だから

$$(\exists x)(\quad x \in X \quad and \quad y = f(x))$$

$x_1, x_2 \in X$ で $y = f(x_1)$, $y = f(x_2)$ すなわち

$$(y, x_1), (y, x_2) \in f_G^{-1}$$

とすると

$$f(x_1) = f(x_2)$$

f が 単射 ですから

$$x_1 = x_2$$

よって f_G^{-1} は関数のグラフになっています。。また,

$$(\forall y \in X)(\exists x \in X)(y = f(x))$$

よって

$$f^{-1} : y \longmapsto x \quad st \quad y = f(x)$$

で写像 X → X が定義できます。
(2)　$y = f(x)$ とおくと
f^{-1} の定義より

$$f^{-1}(y) = x$$

$$i.e. \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

また

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

よって

$$f^{-1}\ f = f\ f^{-1} = i_X \qquad \square$$

命題 3.3.4 $fg = gf = i_X \Leftrightarrow g = f^{-1}$

証明 $gf = i_x$ のとき

$$\begin{aligned} g = g\ i_X &= g(f\ f^{-1}) \\ &= (gf)f^{-1} \\ &= i_X\ f^{-1} \\ &= f^{-1} \end{aligned}$$

$g = f^{-1}$のときは明かに

$$fg = gf = i_x$$

命題 3.3.5　$X \neq \phi$, $Y \neq \phi$ で $f : X \to Y$ とするとき
(**a**)　**f** が 単射 $\Leftrightarrow (\exists g)(g : Y \to X \quad and \quad gf = i_x)$

(**b**)　**f** が 全射 $\Leftrightarrow (\exists h)(Y \to X)$

$$fh = i_Y$$

(**c**)
$f : X \to X$, f が 単射　and　全射 $\Leftrightarrow \exists g \quad X \to X$

$$fg = gf = i_X$$

またこのような g は一意に存在します。

(**d**)
$X \neq \phi$

$f, g : X \to X$ 単射 ならば

$$\begin{array}{ll} (1) & f, g \text{ の合成 } fg : X \to X \text{ は 単射} \\ (2) & (fg)^{-1} = g^{-1} f^{-1} \end{array}$$

証明 (a) f が 単射 のとき x_0 を X のある元として
$g : Y \to X$ を以下のように定義します。
$y \in f(X)$ のとき

$$g(y) = x \quad st(f(x) = y)$$

$y \notin f(X)$ のとき

$$g(y) = x_0$$

$f(x_1) = f(x_2)$ とすると f が 単射 ですから

$$x_1 = x_2$$

となり $g(y) = x$ となる x は唯一に定まる。
ここで、$x \in X$ を任意にとると g の定義から

$$g(f(x)) = x$$

$\therefore \qquad g : Y \to X$ が存在して

$$gf = i_X$$

逆に、$g : Y \to X$ が存在して $gf = i_X$ のとき

$$x\ ,\ x' \in X \quad f(x) = f(x')$$

とすると

$$\begin{aligned} x &= g(f(x)) \\ &= g(f(x')) \\ &= x' \end{aligned}$$

から

$$x = x'$$

よって

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X)(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$
$$\therefore \quad f \text{ は 単射} \quad \square$$

証明 (b) f が 全射 とする。
h を以下のように定める。
$y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ の元 x_y を一つ選び

$$h(y) = x_y$$

$(f(X) = Y$ だから　$(\forall y \in Y)(f^{-1}(y) \neq \phi))$
h の定義から

$$(\forall y \in Y)(h(y) \in f^{-1}(y))$$

よって

$$(\forall y \in Y)(f(h(y)) = y)$$

よって

$$fh = i_Y$$

逆に $(\exists h)(Y \to X \quad and \quad fh = i_Y)$ のとき

$$(\forall y \in Y)(y = i_Y(y) = f(h(y)) \quad and \quad h(y) \in X)$$

よって

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y = f(x))$$

よって

$$f \text{ は 全射}$$

証明 (c) f が 単射 $\Leftrightarrow gf = i_X$
f が 全射 $\Leftrightarrow fg = i_X$
一意性は

$$fg' = g'f = i_X$$

とすると

$$\begin{aligned} g' &= g'i_X \\ &= g'(fg) \\ &= (g'f)g \\ &= i_Xg \\ &= g \end{aligned}$$

よって

$$g' = g \quad \square$$

証明 (d) $x, x' \in X$ を任意にとり

$$(fg)(x) = (fg)(x')$$

とすると

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (fg)(x) \\ &= (fg)(x') \\ &= f(g(x')) \end{aligned}$$

となり、f が 単射 ですから

$$g(x) = g(x')$$

g が 単射 ですから

$$x = x'$$

$$\therefore \qquad (\forall x, x' \in X)((fg)(x) = (fg)(x') \Rightarrow x = x')$$

よって fg は 単射
また任意の $z \in X$ について

$$z = (fg)(x) = f(g(x))$$

となる $x \in X$ が存在する。これから

$$\begin{aligned} f^{-1}(z) &= g(x) \\ g^{-1}(f^{-1}(z)) &= x \end{aligned}$$

よって

$$(fg)^{-1}(z) = x = g^{-1}(f^{-1}(z))$$

よって

$$(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1} \qquad \square$$

命題 3.3.6

(a)

$$X, Y \neq \phi$$

$$f : X \to Y$$

$$A \subseteq X \ , \ B \subseteq Y$$

とする。このとき

$$ff^{-1}(B) \subseteq B$$

$$ff^{-1}(B) = B \Leftrightarrow f \quad \text{は全射}$$

(b)

$$(\forall A \subset X)(A \subseteq f^{-1}(f(A)))$$

$$(\forall A \subset X \quad A = f^{-1}f(A)) \Leftrightarrow f \quad \text{は全射}$$

(c)

$$(\forall A_1, A_2 \subset X)(f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)) \Leftrightarrow f : \text{単射}$$

(d)

$$(\forall A \subseteq X)(f(A)' \subseteq f(A')) \Leftrightarrow f \text{ は全射}$$

(e) f が 全射 とする。このとき

$$f(A)' = f(A') \Leftrightarrow f \text{ は単射}$$

証明 定義より

$$f^{-1}(B) = \{x \mid (x \in X) \quad and \quad (\exists y \in B)(y = f(x))\}$$

です。
ここで、$z \in f(f^{-1}(B))$ となる z を任意に選ぶと

$$\exists x \in f^{-1}(B)$$

$$z = f(x)$$

$$(\exists x \in X)(\exists \in B)(y = f(x))$$

$$(z = f(x) = y \in B)$$

よって

$$z \in B$$

よって任意の z について

$$z \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow z \in B$$

よって

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$$

f が 全射 のとき、$B \subseteq Y$ とする。f が 全射 ゆえ

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y = f(x))$$

よって $y \in B$ とすると

$$(\exists x \in X)(y = f(x))$$

よって

$$(\exists x)(x \in f^{-1}(B) \quad and \quad y = f(x))$$

よって

$$y \in f(f^{-1}(B))$$

よって任意の y について

$$y \in B \Rightarrow y \in f(f^{-1}(B))$$

よって

$$B \subseteq f(f^{-1}(B))$$

$ff^{-1}(B) \subseteq B$ はすでに示したから

$$\forall B \subset Y \quad B = f(f^{-1}(B))$$

次に逆を言う。

$$\forall B \subset Y \quad ff^{-1}(B) = B$$

とすると

$$ff^{-1}(B) \supset B$$

よって $B = Y$ にとると

$$f(X) = f(f^{-1}(Y)) = Y$$

よって f は 全射 $\square$

命題 3.3.6(b)

$$(\forall A \subset X)(A \subseteq f^{-1}(f(A)))$$

$$(\forall A \subset X \quad A = f^{-1}f(A)) \Leftrightarrow f \quad \text{は全射}$$

証明 $A \subset X$ とする。
任意の x を選び $x \in A$ とすると

$$y = f(x) \in f(A)$$

よって

$$x \in f(f^{-1}(A))$$

よって任意の x について

$$x \in A \Rightarrow x \in f(f^{-1}(A))$$

よって

$$A \subseteq f(f^{-1}(A))$$

よって

$$(\forall A \subset X)(A \subseteq f(f^{-1}(A)))$$

f が 単射 とする。
$z \in f^{-1}(f(A))$ となる任意の z を選ぶと

$$(\exists y \in f(A))(y = f(z))$$

$y \in f(A)$ から

$$(\exists x \in A)(y = f(x))$$

よって

$$f(z) = f(x)$$

f は 単射 だから

$$z = x \in A$$

よって任意の z について

$$z \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow z \in A$$

よって

$$f^{-1}(f(A)) \subseteq A$$

$A \subseteq f^{-1}(f(A))$ はすでに示したから

$$\forall A \subset X \quad f^{-1}(f(A)) = A$$

逆を言う

$$(\forall A \subset X)(f^{-1}(f(A)) = A)$$

のとき $x \in X$ となる任意の x を選ぶと、$\{x\} \subset X$ ゆえ

$$(\forall x \in X)(f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\})$$

が成り立っている。
ここで x , $x' \in X$ で $f(x) = f(x')$ とすると

$$\begin{aligned} f(\{x\}) &= \{f(x)\} \\ &= \{f(x')\} \\ &= f\{x'\}) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\{x\} &= f^{-1}(f(\{x\}))\\ &= f^{-1}(f(\{x'\}))\\ &= \{x'\}\end{aligned}$$

よって

$$x = x'$$

よって f は 単射 $\square$

命題 3.3.6(c)

$$(\forall A_1, A_2 \subset X)(f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)) \Leftrightarrow f \text{ は単射}$$

証明

$$(\forall A_1, A_2 \subset X)(f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2))$$

とする。$x, x' \in X$ で $f(x) = f(x')$ とすると

$$\begin{aligned}\{f(x)\} = \{f(x')\} &= f(\{x\}) \cap f(\{x'\})\\ &= f(\{x\} \cap \{x'\})\end{aligned}$$

ここで $x \neq x'$ とすると

$$\{x\} \cap \{x'\} = \phi$$

$$\phi = f(\phi) = \{f(x)\} = \{f(x')\}$$

これは矛盾する。よって

$$x = x'$$

よって f は単射
逆に f が 単射 とすると

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

が成立するから

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$$

をいう。

$$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

とすると、$y \in f(A_1)$ より

$$(\exists x \in A_1)(y = f(x))$$

$y \in f(A_2)$ より

$$(\exists x' \in A_2)(y = f(x'))$$

$$f(x) = y = f(x')$$

f は 単射 だから

$$A_1 \ni x = x' \in A_2$$

よって

$$x \in A_1 \cap A_2$$

よって

$$y = f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$$

よって

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2) \qquad \square$$

命題 3.3.6 (d)

$$(\forall A \subseteq X)(f(A)' \subseteq f(A')) \Leftrightarrow f \text{ は全射}$$

証明

$$(\forall A \subseteq X)(f(A') \subseteq f(A'))$$

を仮定する。$f(X) \subseteq Y$ は成立しているから

$$f(X) \supseteq Y$$

をいう。
ここで、$y \in Y$ を任意に選び、$y \notin f(X)$ とすると

$$\begin{aligned} y \in f(X)' &\subseteq f(X') \\ &= f(\phi) \\ &= \phi \end{aligned}$$

$y \in \phi$ これは矛盾。よって

$$y \in f(X)$$

よって任意の y について

$$y \in Y \Rightarrow y \in f(x)$$

よって

$$Y \subseteq f(X)$$

逆に f が 全射 のとき
y を任意に選び $y \in f(A)'$ とする。
ここで

$$y \notin f(A')$$

とすると

$$(\forall z \in A')(y \neq f(z) \quad and \quad y \in f(A)')$$

ですから

$$(\forall z \in A)(y \notin f(z))$$

よって

$$(\forall z \in X = A \cup A')(y \notin f(z))$$

これは f が 全射 ですことに矛盾。ゆえに

$$y \in f(A')$$

よって任意の y について

$$y \in f(A)' \Rightarrow y \in f(A')$$

ゆえに

$$f(A)' \subseteq f(A') \qquad \square$$

命題 3.3.6(e) f が 全射 とする。このとき

$$f(A)' = f(A') \Leftrightarrow f \text{ は単射}$$

証明 f が 全射 ゆえ (d) により

$$f(A)' \subseteq f(A')$$

f が 単射 とすると
$y \in f(A')$ のとき $y \notin f(A)'$ とすると

$$y \in f(A)$$

$$(\exists x \in A)(y = f(x))$$

$y \in f(A')$ ですから

$$(\exists x' \in A')(y = f(x') \quad and \quad f(x) = f(x'))$$

よって

$$x = x'$$

$$i.e. \quad x \in A\ ,\ x = x' \in A'$$

これは矛盾。よって

$$f(A') \subseteq f(A)'$$

$$f(A') = f(A)'$$

逆に

$$\forall A \subset X \quad f(A') = f(A)'$$

のとき、任意の $x, x' \in A$ を選び
$f(x) = f(x') \quad and \quad x \neq x'$ とすると

$$x' \in \{x\}'$$

よって

$$f(x') \neq f(x)$$

これは矛盾。よって

$$x = x'$$

よって f は 単射　　$\square$