集合の基礎的性質その３

師玉康成

目 次

第1章　関係

今まで，写像（関数）の形式的定義を紹介しました.
これは X から Y への写像（のグラフ）を，直積集合 X × Y の部分集合として扱う方法でした.
写像は

$$f = (G_f, X, Y)$$

で定義されました．G_f は f のグラフで直積集合 $X \times Y$ の部分集合です.
今後,

$$f(x) = x^2 (x \in X)$$

のように X の要素 x に対して対応する Y の要素が具体的に与えられている場合は，写像の表現

$$f = (\{(x, x^2) | x \in X\}, X, Y)$$

の替わりに,

$$f : x \in X \mapsto x^2 \in Y$$

あるいは

$$x \in X \overset{f}{\longmapsto} x^2 \in Y$$

と表します．写像と同様に，直積集合の部分集合で定義できるものとして，2 項関係があります.
「$x \leq y$」とか「x と y は 7 を法として同値」といった二つの変数に関する関係です．これを形式化して扱うのにも直積集合を使います.

1.1　関係の形式的定義

X をその要素に関係を定義する対象の集合とします．R が X 上の関係であるとは

$$R \subseteq X \times X$$

ただし,

$$X \times X = \{(x, y) | x \in X \quad and \quad y \in X\}$$

が成り立つことを言います．R は X の 2 乗直積 $X \times X$ の部分集合であるだけですが特に R が「関係」であることを強調するために $(x, y) \in R$ の替わりに，$R(x, y)$ とか，xRy，また，関係が R であることを明記しなくても良い場合は $x \sim y$ なども用います．

1.2　同値関係

整数での mod 演算などで，今までもでてきましたが X 上の関係 R が特に次をみたすとき R は X 上の同値関係と言います．(1) X の任意の元 $x \in X$ について xRx

$$(\forall x \in X)((xRx) \Rightarrow yRx)$$

「自分自身は友達」(2) X の任意の二つの元 $x \in X$,$y \in X$ について xRy ならば yRx

$$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(xRy \Rightarrow yRx)$$

「君が僕の友達なら，僕は君の友達」(3) X の任意の三つの元 $x, y, z \in X$ について xRy かつ yRz ならば xRz

$$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(\forall z \in X)((xRy \ and \ yRz) \Rightarrow xRz)$$

「友達の友達は，友達だ」xRy を「x と y は（関係 R について）同値」などと言います．

$$\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$$

とおき，写像のグラフと同様に

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

$$R \cdot R = \{(x, z) | (\exists y)((x, y) \in R \ and \ (y, z) \in R)\}$$

とすると上の条件は以下の (1’) ,(2’) ,(3’) と同じです．

$$(1')\Delta \subseteq R$$
$$(2')\ R = R^{-1}$$
$$(3')\ R \cdot R \subseteq R$$

[証明]

（1）⇔（1'）については xRx が $(x,x) \in R$ の別表現でしたから

$$(\forall x \in X)(xRx) \Leftrightarrow (\forall x \in X)((x,x) \in R)$$
$$(\forall x \in X)((x,x) \in R) \Leftrightarrow (\forall w)(w \in \Delta \Rightarrow w \in R)$$
$$(\forall w)(w \in \Delta \Rightarrow w \in R) \Leftrightarrow \Delta \subseteq R$$

(2) ⇔（2'）については
まず（2）を仮定すれば,
X の元 x, y を任意にとると

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow xRy$$
$$xRy \Rightarrow yRx$$
$$yRx \Leftrightarrow (y,x) \in R$$
$$(y,x) \in R \Leftrightarrow (x,y) \in R^{-1}$$

となるので

$$(\forall w)(w \in R \Rightarrow w \in R^{-1})$$

すなわち　$R \subseteq R^{-1}$
全く同様に

$$R^{-1} \subseteq R$$

よって

$$(2')\ R = R^{-1}$$

が成立.
逆に（2　'）を仮定すれば,
X の元 x, y を任意にとると

$$xRy \Leftrightarrow (x,y) \in R$$
$$(x,y) \in R \Leftrightarrow (x,y) \in R^{-1}$$
$$(x,y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in R$$
$$(y,x) \in R \Leftrightarrow yRx$$

すなわち

$$(2)\ (\forall x \in X)(\forall y \in X)(xRy \Rightarrow yRx)$$

が成立.

(3) $\Leftrightarrow$（3'）についてはまず（3）を仮定すれば,
X の元 x, z を任意にとると

$$
\begin{aligned}
&(x,z) \in R \cdot R \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in R \ and \ (y,z) \in R \\
&(x,y) \in R \ and \ (y,z) \in R \Leftrightarrow xRy \ and \ yRz \\
&xRy \ and \ yRz \Rightarrow xRz \\
&xRz \Leftrightarrow (x,z) \in R
\end{aligned}
$$

となるので

$$(\forall w)(w \in R \cdot R \Rightarrow w \in R)$$

すなわち

$$(3') \ R \cdot R \subseteq R$$

が成立.
逆に（3 '）を仮定すれば,
X の元 x, y, z を任意にとると

$$
\begin{aligned}
&xRy \ and \ yRz \Leftrightarrow (x,y) \in R \ and \ (y,z) \in R \\
&(x,y) \in R \ and \ (y,z) \in R \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in R \ and \ (y,z) \in R) \\
&(\exists y)((x,y) \in R \ and \ (y,z) \in R) \Rightarrow (x,z) \in R \cdot R \\
&(x,z) \in R \cdot R \Rightarrow (x,z) \in R
\end{aligned}
$$

となり, x, y, z を任意は任意にとったので

$$(3) \ (\forall x \in X)(\forall y \in X)(\forall z \in X)((xRy \ and \ yRz) \Rightarrow xRz$$

が成立.

[証明終り]

問題

1. $X = \{a, b, c\}$ とするとき $R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$ は同値関係の例です．他の例を作ってください．

2. $X = Z$　　Z は整数全体の集合

$$R = \{(n,m)|m \in Z\ and\ n \in Z\ and\ (\exists k \in Z)(n - m = 7k)\}$$

とするとき R は同値関係であることを示して下さい．
特にこの関係について mRn を $m \equiv n(\mathrm{mod}7)$ で表します．

1.3　分割，同値類

X 上の同値関係 R について,X の元 x と同値な X の元 y 全体の集合を $\rho(x)$ で表します．

$$\rho(x) := \{y|xRy\}$$

これを x の同値類と呼びます．このとき

$$(1)(\forall y \in X)(y \in \rho(x) \Leftrightarrow xRy)$$
$$(2)(\forall x \in X)(\forall y \in X)\ \ (\rho(x) = \rho(y) \Leftrightarrow xRy)$$
$$(3)(\forall x \in X)(\forall y \in X)\ \ (\rho(x) \cap (y) \neq v \Leftrightarrow xRy)$$
$$(4)\bigcup_{x \in X} \rho(x) = X$$

[証明]

(1) X の元 y を任意にとり $y \in \rho(x)$ とすれば，$\rho(x)$ の定義から xRy となる。逆に xRy なら定義により $y \in \rho(x)$

(2) X の元 x, y を任意にとると，$\rho(x) = \rho(y)$ とすると $x \in \rho(x)$ から xRy
逆に xRy として
z を任意にとって $z \in \rho(x)$ とすると $_zR_x$ ゆえ，これと xRy から
zRy　従って　$z \in \rho(y)$
z は任意にとったから

$$(\forall z)(z \in \rho(x) \Rightarrow z \in \rho(y))$$

よって $\rho(x) \subseteq \rho(y)$
同様にして $\rho(y) \subseteq \rho(x)$ も得られるので,

$$\rho(x) = \rho(y)$$

(3) X の元 x, y を任意にとると，

$$\rho(x) \cap (y) \neq \Phi$$

なら

$$(\exists z)(z \in \rho(x)\ and\ z \in \rho(y))$$

$z \in \rho(x)$ and　$z \in \rho(y)$ から　$zRx\ and\ zRy$　が得られ，xRy
逆に xRy なら　(1) から　$\rho(x) = \rho(y)$　従って

$$\rho(x) \cap \rho(y) \neq \Phi$$

(4) 任意の $x \in X$
について xRx ですから，$x \in \rho(x)$
よって $\{x\} \subseteq \rho(x)$

$$\bigcup_{x \in X} \rho(x) \supseteq \bigcup_{x \in X} \{x\} = X$$

一方 $\rho(x) \subseteq X$ ですから

$$\cup \rho(x) \subseteq X\ ,\ x \in X$$

結局

$$\bigcup_{x \in X} \rho(x) = X$$

[証明終り]

問題
$X = \{a, b, c, d\}$ とするとき

$$R = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,c), (c,d), (d,c), (d,d)\}$$

は同値関係の例です．$\rho(a), \rho(b), \rho(c)$ を求めてください．

1.4　商集合

X の各元 x についての同値類 $\rho\ (x)$ の全体を X/R で表し，X の R による商集合と言います．

$$X/R = \{\rho(x)|x \in X\}$$

上の (1) から (4) によれば

$$(\forall s \in X/R)(\forall x \in s)(s = \rho(x))$$
$$(\forall s \in X/R)(\forall u \in X/R)(s \cap u \neq \Phi \Rightarrow s = u)$$
$$(\forall s \in X/R)(\forall u \in X/R)(s \neq u \Rightarrow s \cap u = \Phi)$$
$$\bigcup_{s \in X/R} = X$$

X は同値類の

$$s \in X/R$$

で分割されています．

問題

$X = Z$, Z は整数全体の集合

$$R = \{(n, m)|m \in Z\ and\ n \in Z\ and\ (\exists k \in Z)\ \ (n - m = 7k)\}$$

とするとき R は同値関係です．

$$\bigcup_{x \in Z} \rho(x) = Z$$

を確かめて下さい．X/R の元はいくつありますか？

1.5　写像の標準分解

$f : X \to Y$ とします．X 上の同値関係 xRy を $f(x) = f(z)$ で定義します．R の直積による表現は

$$R := \{(x, z)|x \in X\ and\ z \in X\ and\ f(x) = f(z)\}$$

です．

X から X/R への写像 p を

$$p : x \in X \mapsto \rho(x) \in X/R$$

で定義します.

このとき X/R から $f(X)$ への写像 f_R が

$$f_R : \rho(x) \in X/R \mapsto f(x) \in f(X)$$
$$f = (\{(\rho(x), f(x))|x \in X\}, X/R, f(X))$$

で定義され，これは双射で

$$f = id_Y \cdot (f_R) \cdot p$$

ここで id_Y 　はY 上の恒等写像

$$(\forall y \in Y)(id_Y(y) = y)$$

という関係が成り立っています．これを f の標準分解と言います.

[証明]

(1) まず,

$$f_R : \rho(x) \in X/R \mapsto f(x) \in f(X)$$

が写像を定義していることを確認します．すなわち

$$f = (\{(\rho(x), f(x))|x \in X\}, X/R, f(X))$$

が写像になっていることを確認します.

$\rho(x)$ は x と R について同値な z によって $\rho(x) = \rho(z)$ となります.

この z は x と等しいとは限りません．代表元の取り方が異なるわけです.

しかし，この z を用いて $f_R(\rho(x)) = f(z)$ としても，z は x と R について同値ゆえ $f(x) = f(z)$ となります.　結局

$$f(x) = f_R(\rho(x)) = f_R(\rho(z)) = f(z)$$

が成り立っています.

$$G_f = \{(\rho(x), f(x))|x \in X\}$$

として

$$(\rho(x), f(x)), \rho(z), f(z) \in G_f$$

で $\rho(x) = \rho(z)$ なら $f(x) = f(z)$ が成り立っていますので G_f は関数のグラフになっています.

(2) 次に，f_R が全射であることを確認します.
y が $f(X)$ の元ならある X の元 x が存在して $y = f(x)$ です.
この x の同値類 $\rho(x) \in X/R$ に f_R を作用させれば

$$f_R(\rho(x)) = f(x) = y$$

です.
即ち，

$$(\forall y \in Y)(\exists s \in X/R)(f_R(s) = y)$$

これは f_R であることを示しています.

(3) 今度は，f_R が単射であることを確認します.
$s, v \in X/R$ を任意にとり $f_R(s) = f_R(v)$ とすると
$s \in X/R$ ですから，ある $x \in X$ が存在して，
$\rho(x) = s$
同様に $v \in X/R$ ですから，
ある $z \in X$ が存在して，$\rho(z) = v$
f_R の定義から

$$f_R(s) = f(x), f_R(v) = f(z)$$

これらと $f_R(s) = f_R(v)$ から
$f(x) = f(z)$
よって x と z は関係 R について同値.
従って

$$s = \rho(x) = \rho(z) = v$$

$s, v \in X/R$ を任意にとっていましたから

$$(\forall s \in X/R)(\forall v \in X/R)(f_R(s) = f_R(v) \Rightarrow s = v)$$

これは f_R が単射であることを示しています.

(4) 最後に
任意の $x \in X$ について

$$
\begin{aligned}
(id_Y \cdot (f_R) \cdot p)(x) &= (id_Y \cdot (f_R))(p(x)) \\
&= id_Y(f_R(p(x))) \\
&= id_Y(f_R(\rho(x))) \\
&= id_Y(f(x)) \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

が成り立っています.
よって,

$$f = id_Y \cdot (f_R) \cdot p$$

[証明終]
問題
（1）　$X = \{a, b, c, d\}$,　$Y = \{0, 1\}$ とします.
$f = (\{(a, 1), (b, 0), (c, 1), (d, 0)\}, X, Y)$
の標準分解を求めてください.
（2）$f : n \in Z \mapsto n(\mathrm{mod} 7) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
の標準分解を求めてください.
$n(\mathrm{mod} 7)$ は n を 7 で割った余りを表します.

1.6　順序関係

X 上の関係 S が特に次をみたすとき S は順序関係と言います.

(1) X の任意の元 $x \in X$ について　xSx

$$(\forall x \in X)(xSx)$$

(2) X の任意の二つの元 $x \in X$,$y \in X$ について xSy ならば ySx

$$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(xSy \ and \ ySx \Rightarrow x = y)$$

(3) X の任意の三つの元 $x, y, z \in X$ について　xSy　かつ　ySz　ならば xSz

$$(\forall x \in X)\ \ (\forall y \in X)\ \ (\forall z \in X)\ \ ((xSy \ and \ ySz) \Rightarrow xSz)$$

以後，xSy を $x \leq y$ で表します.

(1)X の任意の元 $x \in X$ について　$x \leq x$

$$(\forall x \in X)(x \leq x)$$

(2) X の任意の二つの元 $x \in X$,$y \in X$ について $x \leq y$ ならば $y \leq x$

$$(\forall x \in X)\ (\forall y \in X)\ (x \leq y\ and\ y \leq x \Rightarrow x = y)$$

(3) X の任意の三つの元 $x, y, z \in X$ について $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$

$$(\forall x \in X)\ (\forall y \in X)\ (\forall z \in X)\ ((x \leq y\ and\ y \leq z) \Rightarrow x \leq z)$$

$\Delta = \{(x, x)|x \in X\}$ とおき，写像のグラフと同様に

$$S^{-1} = \{(y, x)|(x, y) \in S\}$$
$$S \cdot S = \{(x, z)|(\exists y)((x, y) \in S\ and\ (y, z) \in S)\}$$

とすると上の条件は以下の (1'),(2') と同じです.

(1')

$$S \cap S^{-1} = \Delta$$

(2 ')

$$S \cdot S \subseteq S$$

問題

　$X = \{a, b, c\}$ とするとき
$S = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c)\}$
は順序関係の例です．他の例を作ってください.

問題　同値関係の説明と同様にして
(1) and (2) and (3) $\Leftrightarrow$ (1') and (2') であることを示して下さい.

1.7　全順序

X 上の順序関係がさらに (4) を満たすとき，全順序関係と言います.

(1) X の任意の元 $x \in X$ について　$x \leq x$

$$(\forall x \in X)(x \leq x)$$

(2) X の任意の二つの元 $x \in X, y \in X$ について $(x \leq y)$ ならば $(y \leq x)$

$$(\forall x \in X)\ (\forall y \in X)\ (x \leq y\ and\ y \leq x \Rightarrow x = y)$$

(3) X の任意の三つの元 $x, y, z \in X$ について　$x \leq y$　かつ　$y \leq z$
ならば　$x \leq z$

$$(\forall x \in X)\ (\forall y \in X)\ (\forall z \in X)\ ((x \leq y\ and\ y \leq z) \Rightarrow x \leq z)$$

(4) X の任意の三つの元 $x, y \in X$ について　$x \leq y$　かまたは　$y \leq x$

$$(\forall x \in X)\ (\forall y \in X)\ (x \leq y\ oS\ y \leq x)$$

これと等価な条件は

(1') $S \cap S^{-1} = \Delta$

(2') $S \cdot S \subseteq S$

(3') $S \cap S^{-1} = X \times X$

問題　同値関係の説明と同様にして
(1) 〜 (4)⇔ (1') 〜 (4') であることを示して下さい.

問題
$X = \{a, b, c\}$ とするとき
$S = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$
は全順序関係の例です．他の例を作ってください.

1.8 上界，下界，上限，下限

順序関係が与えられた X の部分集合 $A \subseteq X$ について

X の元 $x0$ が A の上界であるとは　A の任意の元 a に対して $a \leq x_0$ であることを言います.
x_0 が A の上界である $\Leftrightarrow$

$$(\forall a \in A)(a \leq x_0)$$

item X の元 y_0 が A の下界であるとは A の任意の元 a に対して $y_0 \leq a$ であることを言います.
y_0 が A の下界である $\Leftrightarrow$

$$(\forall a \in A)(y_0 \leq a)$$

A の上界全体の集合 $U[A]$ が空集合でないとき一すなわち，　A の上界 $x_0 \in X$ が少なくとも 1 つ存在するとき一A は上に有界であるといいます.
A は上に有界である $\Leftrightarrow$

$$U[A] \neq \phi \Leftrightarrow (\exists x_0 \in X)\ (\forall a \in A)\ (a \leq x_0)$$

$U[A]$ の最小元を一これが存在すれば一A の上限といい $\sup(A)$ で表します.

$$\begin{aligned}
&\sup(A) = min\{U[A]\} \\
&(\forall a \in A)(a \leq \sup(A))\ and\ (\forall x_0 \in X)\ \{(\forall a \in A)(a \leq x_0) \\
&\Rightarrow (\sup(A) \leq x_0)\}
\end{aligned}$$

A の下界全体の集合 $L[A]$ が空集合でないとき一すなわち，　A の下界 $y_0 \in X$ が少なくとも 1 つ存在するとき一A は下に有界であるといいます.
A は下に有界である $\Leftrightarrow$

$$L[A] \neq \phi \Leftrightarrow (\exists y_0 \in X)(\forall a \in A)(y_0 \leq a)$$

$L[A]$ の最大元を一これが存在すれば一A の下限といい $inf(A)$ で表します.

$$\begin{aligned}
&\inf(A) = \max\{L[A]\} \\
&(\forall a \in A)\ (\inf(A) \leq a) \\
and\ (\forall y_0)\{(\forall a \in A)(y_0 \leq a) \quad &\Rightarrow (x_0 \leq \inf(A))\}
\end{aligned}$$

1.9　増加写像・減少写像

　E, F を順序集合とします。
$x, y \in E$ の順序関係を

$$x \leq_E y$$

で表し, $p, q \in F$ の順序関係を

$$p \leq_F q$$

で表すことにします。
　写像

$$f : E \to F$$

が与えられたとき, 増加・減少・真に増加・真に減少を以下のように定義します。

$$f: \text{増加} \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x, y \in E)(x \leq_E y \Rightarrow f(x) \leq_F f(y))$$
$$f: \text{減少} \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x, y \in E)(x \leq_E y \Rightarrow f(y) \leq_F f(x))$$

$$x <_E y \overset{def}{\Leftrightarrow} x \leq_E y\ and x \neq y$$
$$p <_F q \overset{def}{\Leftrightarrow} p \leq_F q\ and p \neq q$$

とするとき,

$$f: \text{真に増加} \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x, y \in E)(x <_E y \Rightarrow f(x) <_F f(y))$$

$$f: \text{真に減少} \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x, y \in E)(x <_E y \Rightarrow f(y) <_F f(x))$$

1.10　極大元，極小元，最大元，最小限

　順序関係が与えられた X の部分集合 $A \subseteq X$ について

m_0 が A の極大元であるとは　m_0 が A の元で，A の任意の元 a に対して $m_0 \leq a$ ならば $m_0 = a$　であることを言います.
　m_0 が A の極大元であるとは：

$$m_0 \in A\ and (\forall a \in A)(m_0 \leq a \Rightarrow m_0 = a)$$

l_0 が A の極小元であるとは　l_0 が A の元で，A の任意の元 a に対して
$a \leq l_0$ ならば $l_0 = a$　であることを言います.

l_0 が A の極小元である $\Leftrightarrow$

$$l_0 \in A \ and \ \ (\forall a \in A)(a \leq l_0 \Rightarrow l_0 = a)$$

m が A の最大元であるとは　m が A の元で，A の任意の元 a に対して
$a \leq m$　であることを言います.
m が A の最大元である $\Leftrightarrow$

$$m \in A \ and \ (\forall a \in A)(a \leq m)$$

l が A の最小元であるとは　l が A の元で，A の任意の元 a に対して
$l \leq a$　であることを言います.　　l_0 が A の最小元である $\Leftrightarrow$

$$l_0 \in A \ and \ (\forall a \in A)(l_0 \leq a)$$

最大元，最小元は存在すればそれぞれ唯一つです.

[証明] もし，m_1 と m_2 が A の最大元なら定義により

$$m_1 \in A \ and \ (\forall a \in A)(a \leq m_1)$$

$$m_2 \in A \ and \ (\forall a \in A)(a \leq m_2)$$

m_1 と m_2 は A の元ですから，1 番目の式の a に m_2 を代入し，2 番目の式の a に m_1 を代入すると

$$m_2 \leq m_1, \quad m_1 \leq m_2$$

これから $m_1 = m_2$ です．最小元についても全く同様にできます．[証明終り]

問題
以下を示して下さい.

(1)　最大元，最小元はそれぞれ極大元，極小元でもあります.

(2)　最大元，最小元はそれぞれ上限，下限でもあります.

問題
R を実数の集合とし，R 上の順序は中学校時代から習っている大小関係 $\leq$ とします.
$a < b$ のとき $A = (a, b] = \{x \in R | a < x \leq b\}$
について

(1) R での A の上界全体の集合 $U[A]$ と下界全体の集合 $L[A]$ を求めてください.

(2) R での A の上限，下限は存在しますか？　存在すればそれぞれ求めてください.

(3) R での A の最大元，最小元は存在しますか？　存在すればそれぞれ求めてください.

Q を有理数全体の集合とします．$B = \{x \in Q | 1 < x < \sqrt{2}\}$ について

(4) R での B の上界全体の集合 $U[B]$ と下界全体の集合 $L[B]$ を求めてください.

(5) R での B の上限，下限は存在しますか？　存在すればそれぞれ求めてください.

(6) R での B の最大元，最小元は存在しますか？　存在すればそれぞれ求めてください.

(7) Q での B の上界全体の集合 $U[B]$ と下界全体の集合 $L[B]$ を求めてください.

(8) Q での B の上限，下限は存在しますか？　存在すればそれぞれ求めてください.

(9) Q での B の最大元，最小元は存在しますか？　存在すればそれぞれ求めてください.

問題

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

$$S = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, d), (b, e), \\ (c, c), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e)\}$$

$$A = \{a, b, c\}$$

とするとき

(1)　X での A の上界全体の集合 $U[A]$ と下界全体の集合 $L[A]$ を求めてください.

(2) X での A の上限，下限は存在しますか？ 存在すればそれぞれ求めてください．

(3) X での A の最大元，最小元は存在しますか？ 存在すればそれぞれ求めてください．

1.11 整列順序

1.11.1 整列順序の定義

X 上の順序関係がさらに

$$(\forall Y : Y \subseteq X \ and \ Y \neq \phi)(\exists y_0)(y_0 \text{は} \ Y \ \text{の最小元}))$$

を充たすとき整列順序であると言います。

X 上に整列順序関係が与えられたとき,X の任意の 2 元 x, y についての X の部分集合 x, y は定義により最小元を持ちますから

$$x \leq y \ or \ y \leq x$$

が成立つことになり,X 上は全順序集合になります。この逆は必ずしも成立ちません。全順序集合であっても, 整列順序集合でない場合があります。

1.11.2 超限帰納法

X が整列集合とし,$\mathcal{P}(x)$ は関係式とします。

$$(\forall x)\{(x \in X) \ and \ (\forall y : y \in X \ and \ y < x)(\mathcal{P}(y)) \Rightarrow \mathcal{P}(x)\}$$

が成立つとき

$$(\forall x)\{(x \in X) \Rightarrow \mathcal{P}(x)\}$$

が成立ちます。これを自然数での数学的帰納法になぞらえて超限帰納法と呼びます。[証明] 前半の関係式

$$(\forall x)\{(x \in X) \ and \ (\forall y : y \in X \ and \ y < x)(\mathcal{P}(y)) \Rightarrow \mathcal{P}(x)\}$$

が成立してかつ

$$(\forall x)\{(x \in X) \Rightarrow \mathcal{P}(x)\}$$

が成立たないとします。

$$not(\forall x)\{(x \in X) \Rightarrow \mathcal{P}(x)\} \Leftrightarrow (\exists x)\{(x \in X) \ and \ not\mathcal{P}(x)\}$$

ですから

$$(\exists x)\{(x \in X)\ and\ not\mathcal{P}(x)\}$$

が成立ち, 集合

$$\mathcal{Y} = x|(x \in X)\ and\ not\mathcal{P}(x)$$

が空集合でないことになります。すると X は整列集合でしたから $\mathcal{Y} \subseteq X$ には最小元 $x \in \mathcal{Y}$ が存在します。

しかし, 任意の $y \in X, y < x$ については $not(y \in \mathcal{Y})$ ゆえ, $\mathcal{P}(y)$ が成立します。すると仮定した前半の関係式から, $\mathcal{P}(x)$ が成立ちこれは $x \in \mathcal{Y}$ に矛盾します。[証明終]

順序集合 X で,

$$Y \text{ が } X \text{ の切片} \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall y \in Y)(\forall x \in X)(x \leq y \Rightarrow x \in Y)$$

$X \in X$ について

$$(\leftarrow, x) := \{y|y \in X\ and\ y \leq x\ and\ y \neq y\}$$

X を整列順序集合とするとき：

$$Y \subseteq X,\ Y \neq X,\ Y \text{ が } X \text{ の切片} \iff (\exists x)(x \in X\ and\ Y = (\leftarrow, x))$$

[証明]

$$Y \subseteq X,\ Y \neq X,\ Y \text{ が } X \text{ の切片}$$

とすると：

$$X \setminus Y \neq \phi$$

X は整列順序集合だから

$$m = \min\{X \setminus Y\}$$

が存在する。

$m \leq x$ のとき,$x \in Y$ とすると Y が X の切片 だから $m \in Y$ となり, 矛盾。よって $x \notin Y$

よって,

$$[m, \rightarrow) = \{x|x \in X\ and\ m \leq x\} \subseteq X \setminus Y$$

$x \notin X \setminus Y$ とすると

$$m = \min X \setminus Y$$

$$m \leq x \quad i.e. x \in [m, \rightarrow)$$

よって

$$[m, \rightarrow) = X \setminus Y$$

ゆえに,

$$Y = (\leftarrow, m)$$

逆に, $(\leftarrow, m)$ が X の切片で $(\leftarrow, m) \neq X$ は明らか。

[証明終]

X を整列順序集合とするとき：

$$x \in X \mapsto (\leftarrow, x) \in \mathcal{S}(X)$$
$$\mathcal{S}(X) = \{Y | Y \subseteq X \ and \ Y \text{ が } X \text{ の切片 } and \ Y \neq X\}$$

は整列順序について同型。

$$\{Y : Y \subseteq X \ and \ X \text{ の切片 }\} = \mathcal{S}(X) \bigcup \{X\}$$

は整列順序集合

[証明]

$x, y \in X$ を任意にとるとき,

$x \leq y$ から

$$z \in (\leftarrow, x) \Rightarrow z \leq x \Rightarrow z \leq y \Rightarrow z \in (\leftarrow, x)$$

で

$$(\leftarrow, x) \subseteq (\leftarrow, y)$$

従って

$$x \leq y \Rightarrow (\leftarrow, x) \subseteq (\leftarrow, y)$$

$x \leq y\ and\ x \neq y$ のとき

$$(\leftarrow, x) = (\leftarrow, y)$$

とすると

$$[x, \rightarrow) = [y, \rightarrow)$$

から

$$x \leq y\ and\ y \leq x$$

よって

$$x = y$$

となり矛盾。よって,

$$(\leftarrow, x) \quad \subseteq (\leftarrow, y)\ and\ (\leftarrow, x) \quad \neq (\leftarrow, y)$$

従って

$$x < \Rightarrow (\leftarrow, x) \subseteq (\leftarrow, y)\ and\ (\leftarrow, x) \quad \neq (\leftarrow, y)$$

よって

$$x \in X \mapsto (\leftarrow, x) \in \mathcal{S}(X)$$
$$\mathcal{S}(X) = \{Y | Y \subseteq X\ and\ Y \text{ が } X \text{ の切片 } and\ Y \neq X\}$$

は整列順序について同型。

$$\{Y : Y \subseteq X\ and\ X \text{ の切片 }\} = \mathcal{S}(X) \bigcup \{X\}$$

が整列順序集合であることも明らか。（X を最大元として $\mathcal{S}(X)$ に加える。）

1.11.3 整列可能定理

以下の定理が知られています。

[**ツェルメロの整列可能性定理**] **任意の集合 E 上に整列順序が存在する。**

以下に証明を述べますが,

X が有限集合か, 自然数の集合 $\mathbf{N}$ との間に双射が存在するなら整列順序を入れることは難しくありません。実際, 双射

$$k : x \in E \mapsto \tau(n) \in \mathbf{N}$$

があれば,E の順序を

$$x \leq y \overset{def}{\Leftrightarrow} k(x) \leq k(y)\ (x, y \in E)$$

で定義すればこの順序関係は整列順序になります。ただし, この資料では, 第 5 章で集合の基数を定義して, それによって始めて自然数が定義されます。

$\mathbf{N}$ との間に双射が存在しなくても, 順序を定義する方法の, アイデアの一つは, 次のようなものです。

まず,$x \in E$ を一つ取り出し, これを定義したい順序で, 最初の要素とします。次に $E \setminus \{x\}$ から要素 $y \in X$ を取り出し, これを x の次の要素とします。さらに $E \setminus \{x, y\}$ から要素 $z \in X$ を取り出し, これを y の次の要素とします。無論は E は無限集合で, しかも,$\mathbf{N}$ との間に双射が定義されず, 1 番目, 2 番目,$\cdots$, と要素の選択を「数学的帰納法」で定義できないかもしれません。

そこで, 任意の E 部分集合 $Y \subseteq X$ に対して,

$$\tau(Y) \in E \setminus Y$$

となるような写像 τ を作ります。このような写像は,E のべき集合

$$\mathcal{B}(E) = \{Y | Y \subseteq E\}$$

を使って造られる集合の族,

$$\begin{aligned} &(\mathcal{P}_Y), Y \in \mathcal{C} \\ &\mathcal{P}_Y = E \setminus Y \\ &\mathcal{C} = \mathcal{B}(E) \setminus \{E\} \end{aligned}$$

の多重直積

$$\prod(Y \in \mathcal{C})\mathcal{P}_{\mathcal{Y}} = \{f | f : Y \in \mathcal{C} \to \bigcup_{Y \in \mathcal{C}} \mathcal{P}_Y, (\forall Y \in \mathcal{C})(f(Y) \in \mathcal{P}_Y)\}$$

の元 τ を使います。この集合が空集合でないことは,

$$Y \in \mathcal{C} = \mathcal{B}(E) \setminus \{E\},\ \ \mathcal{P}_Y = E \setminus Y \neq \phi)$$

ですので選択公理によって保証されます。

$$\tau(Y), Y \subseteq E, Y \neq E$$

の直感的な意味は,Y の全ての要素により (順序 R について) 真に大きい要素で, しかもそのような要素の中では, 一番小さい要素です。結局

$$\tau([\leftarrow, x)) = x$$

を使って, 順序が定義される区間を漸次拡張する方法を使うことになりますが,
$x \leq y$ のとき $[\leftarrow, x)$ と $[\leftarrow, x)$ に定義された順序が矛盾の無いように定義していく必要があります。

[**ツェルメロの定理の証明**]

上に述べたように,

$$(\mathcal{P}_Y), Y \in \mathcal{C}$$
$$\mathcal{P}_Y = E \setminus Y$$
$$\mathcal{C} = \mathcal{B}(E) \setminus \{E\}$$

とすると

$$Y \in \mathcal{C} = \mathcal{B}(E) \setminus \{E\}, \quad \mathcal{P}_Y = E \setminus Y \neq \phi)$$

であり, 選択公理によってその多重直積

$$\prod_{(} Y \in \mathcal{C})\mathcal{P}_{\mathcal{Y}} = \{f | f : Y \in \mathcal{C} \to \bigcup_{Y \in \mathcal{C}} \mathcal{P}_Y, (\forall Y \in \mathcal{C})(f(Y) \in \mathcal{P}_Y)\}$$

は空集合ではない。この集合の元の一つを τ とすると,

$$(\forall Y \in \mathcal{C})(\tau(Y) \in E \setminus Y)$$

ここで, 以下の**補題**を使えば

$$(\exists F : F \subseteq E)(F \neq \mathcal{C}\} \ and \ F \text{ は整列順序集合})$$

が成立ち,

$$\mathcal{C} = \mathcal{B}(E) \setminus \{E\}$$

だったので,

$$F = E$$

です。[**ツェルメロの定理の証明終**]

[補題]

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(E)$$
$$\tau : \mathcal{C} \to E$$
$$(\forall Y \in \mathcal{C})(\tau(Y) \in E \setminus Y)$$

このとき

$(\exists F : F \subseteq E)(\exists R : R \subseteq F \times F\ and\ R$ は F 上の整列順序)
$\{(\forall x \in F)((\leftarrow, x)_R \in \mathcal{C}\ and\ \tau((\leftarrow, x)_R) = x)$
$F \neq \mathcal{C}\}$
ただし, $(\leftarrow, x)_R = \{z | z \in F\ and\ z \leq_R x\}$
で, 順序 $z \leq_R x$ は R で定義される。$((z, x) \in R)$

[補題の証明]

$\mathcal{K} = \{S | S \in E \times E\ and\ S$ は $dom(S) = \{x | (\exists y)((x, y) \in S\}$ 上の整列順序
$(\forall x \in S)((\leftarrow, x)_S \in \mathcal{C}\ and\ \tau((\leftarrow, x)_S) = x)\}$
ただし, $(\leftarrow, x)_S = \{z | z \in dom(S)\ and\ z \leq_S x\}$
で, 順序 $z \leq_S x$ は S で定義される。$((z, x) \in S)$

とおく。

ここで,

$$W = \{x \in S \bigcap T | (\leftarrow, x)_S = (\leftarrow, x)_T$$
$$and\ S \bigcap (\leftarrow, x)_S \times (\leftarrow, x)_S = T \bigcap (\leftarrow, x)_T \times (\leftarrow, x)_T\}$$

とおくと：

$x \in W, y \in dom(T)$ を任意にとり,$y \leq_T x$ とすると $t \in W$ よって

$$(\forall x \in W)(\forall y \in dom(T))(y \leq_T x \Rightarrow y \in W)$$

$x \in W, y \in dom(S)$ を任意にとり,$y \leq_S x$ とすると $t \in W$ よって

$$(\forall x \in W)(\forall y \in dom(S))(y \leq_S x \Rightarrow y \in W)$$

また W の構成法から

$$T \bigcap W \times W = S \bigcap W \times W$$

$W \neq dom(S)$ かつ $W \neq dom(T)$ とすると

$$x_s = \min\{S \setminus W\}, x_T = \min\{T \setminus W\}$$

とおくと,

$$W = (\leftarrow, x_S)_S, \quad W = (\leftarrow, x_T)_T$$

しかし,$S \in \mathcal{K}$ から

$$(\leftarrow, x_S)_S \in \mathcal{C}, \tau((\leftarrow, x_S)_S) = x_S$$

同様に,$T \in \mathcal{K}$ から

$$(\leftarrow, x_T)_T \in \mathcal{C}, \tau((\leftarrow, x_T)_T) = x_T$$

よって

$$x_T = \tau((\leftarrow, x_T)_T) = \tau(W) = \tau((\leftarrow, x_S)_S) = x_S$$

ゆえに W の定義から

$$x_T = x_S \in W$$

これは

$$x_s = \min\{S \setminus W\}, x_T = \min\{T \setminus W\}$$

に矛盾。

以上から

任意の $S, T \in \mathcal{K}$ について

$$dom(S) \subseteq dom(T) \ or \ dom(T) \subseteq dom(S)$$

で

$$\begin{aligned}
& dom(S) \subseteq dom(T) \\
& \Rightarrow S = T \bigcap dom(S) \times dom(S) \\
& \ and \ (\forall x \in dom(S))(\forall y \in dom(T))(y \leq_T x \Rightarrow y \in dom(S))
\end{aligned}$$

ここで,

$$F = \bigcup_{S \in \mathcal{K}} dom(S)$$
$$R = \bigcup_{S \in \mathcal{K}} S$$

とおくと：

$$R \subseteq F \times F, dom(R) = \bigcup_{S \in \mathcal{K}} S = F$$

任意の $x \in F$ について,

$$(\exists S \in \mathcal{K})(x \in S)$$

R の作り方から

$$(x, x) \in \bigcup_{S \in \mathcal{K}} S\ F$$

$$(x, y), (y, z) \in R$$

とすると,$S, T \in \mathcal{K}$ が存在して

$$(x, y) \in S, (y, z) \in T$$

が成立ち, $S \subseteq T\ or\ T \subseteq S$ から

$$(x, y), (y, z) \in T\ or\ (x, y), (y, z) \in S$$

従って,

$$(x, z) \in T\ or\ (x, z) \in S$$

どちらの場合でも

$$(x, z) \in R$$

$$(x, y), (y, x) \in R$$

とすると, 上と全く同様に $S, T \in \mathcal{K}$ が存在して

$$(x, y), (y, x) \in T\ or\ (x, y), (y, x) \in S$$

どちらの場合でも

$$x = y$$

任意の $x, y \in F$ について, $S, T \in \mathcal{K}$ が存在して

$$x \in S\ or\ y \in T$$

これについても $S \subseteq T\ or\ T \subseteq S$ から

$$x, y \in S\ or\ x, y \in T$$

$S,T \in \mathcal{K}$ は整列順序ゆえ全順序でもあるので

$$(x,y) \in S \ or \ (y,x) \in S$$

または

$$(x,y) \in T \ or \ (y,x) \in T$$

どちらにしても,

$$(x,y) \in R \ or \ (y,x) \in R$$

結局,R は F 上の全順序になる。

$$D \subseteq F$$

を任意にとると：$S \in \mathcal{K}$ が存在して

$$dom(S) \bigcap D \neq \phi)$$

$dom(S)$ は整列集合で,

$$dom(S) \bigcap D \subseteq S, dom(S) \bigcap D \neq \phi$$

から, $dom(S) \bigcap D$ には最小元 $d \in dom(S) \bigcap D$ が存在する。

ここで, 任意の $x \in D$ について $T \in \mathcal{K}$ が存在して

$$x \in dom(T) \bigcap D$$

で,$S \subseteq T \ or \ T \subseteq S$ から

$T \subseteq S$ のときは

$$x \in dom(T) \bigcap D \subseteq dom(S) \bigcap D$$

より,d は $dom(S) \bigcap D$ の S による最小元なので,

$$(d,x) \in S \ i.e. \ d \leq_S x$$

これから

$$(d,x) \in R \ i.e. \ d \leq_R x$$

$S \subseteq T$ のときは

$$(\forall x \in dom(S))(\forall y \in dom(T))(x \leq_T y \Rightarrow y \in dom(S))$$

従って,

$$x \leq_T d, x \neq d$$

とすると,

$$x \in dom(S), x \in D$$

しかし, これは d は $dom(S) \bigcap D$ の S による最小元であることに矛盾

T は全順序だったので

$$d \leq_T x$$

これから

$$d \leq_R x$$

結局, ここで, 任意の $x \in D$ について

$$d \leq_R x$$

以上から,R は F 上の整列順序になっている。

ここで,$F \in \mathcal{C}$ とすると,τ についての仮定から

$$a = \tau(F) \notin F$$

であり,

$$F' = F \bigcup \{a\}$$
$$R' = R \bigcup \bigcup_{x \in F} \{(x, a)\}$$

とおけば, 構成の仕方から,

$$F' \neq F \ and \ R' \neq R$$

にも関わらず,

$$R' \in \mathcal{K}$$

でこれは

$$F = \bigcup_{S \in \mathcal{K}} dom(S)$$
$$R = \bigcup_{S \in \mathcal{K}} S$$

に矛盾する。[**補題の証明終**]

1.11.4 Zörn の補題

[命題]
順序集合 Γ の任意の整列部分集合 Λ が Γ で上に有界であるとする．このとき Γ には極大元が存在する．

[証明]
Γ の順序を Δ とする。

$$\mathcal{C} = \{\Lambda | \Lambda \subseteq \Gamma \ and \ (\exists p)(p \in \Gamma \setminus \Lambda)((\forall g \in \Lambda)(g \leq_\Delta p)$$

とし, 集合族

$$\{X_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{C}}, \quad X_\Lambda = p | p \in \Gamma \setminus \Lambda) \ and \ ((\forall g \in \Lambda)(g \leq_\Delta p)$$

に選択公理を適用すれば,

$$\tau \in \prod_{\Lambda \in \mathcal{C}} X_\Lambda$$

が存在して, 任意の $\Lambda \in \mathcal{C}$ に対して

$$\tau(\Lambda) \in \Gamma \setminus \Lambda, \quad and \ ((\forall g \in \Lambda)(g \leq \tau(\Lambda))$$

[**ツェルメロの定理**] の証明に用いた**補題**を適用すると,

$$\Lambda \subseteq \Gamma, R \subseteq \Lambda \times \Lambda \ and \ R \text{ は}\Lambda\text{上の整列順序}$$

が存在し以下を充たす。

$$\begin{aligned}
&\{(\forall x \in \Lambda)((\leftarrow, x)_R \in \mathcal{C} \ and \ \tau((\leftarrow, x)_R) = x) \\
&\Lambda \neq \mathcal{C}\} \\
&\text{ただし}, (\leftarrow, x)_R = \{z | z \in \Lambda \ and \ z \leq_R x\} \\
&\text{で}, \text{順序 } z \leq_R x \text{ は } R \text{ で定義される。}((z, x) \in R)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x <_R y \Leftrightarrow (x, y) \in R \ and \ x \neq y \\
&\Leftrightarrow x \in (\leftarrow, y)_R \\
&\Rightarrow x \leq_\Delta \tau((\leftarrow, y)_R) = y \ and \ x \neq y \\
&x <_\Delta y
\end{aligned}$$

すなわち

$$x \in \Lambda \mapsto x \in \Gamma$$

は順序 R と Δ について真に単調増加。

$$x \leq_\Delta y$$

とし,

$$y <_R x$$

とすると, 恒等写像が単調増加だから

$$y <_\Delta x$$

となり矛盾。よって

$$x \leq_\Delta y \Rightarrow x \leq_R y$$

結局

$$(\forall x, y \in \Lambda)(x \leq_\Delta y \Leftrightarrow x \leq_R y)$$

ゆえに

$$R = \Delta \bigcap (\Lambda \times \Lambda)$$

よって,Λ は Γ の順序について整列部分集合従って, 上に上に有界であるから,

$p \in \Gamma$ が存在して

$$(\forall x \in \Lambda)(x \leq_\Delta p)$$

一方,

$$\Lambda \neq \mathcal{C}\}$$

ゆえ,

$$not(\exists p : p \in \Gamma \setminus \Lambda)((\forall g \in \Lambda)(g \leq_\Delta p)$$

　従って,

$$p \leq q$$

となる $q \in \Gamma$ について

$$q \neq p$$

とすると,

$$q \in \Gamma \setminus \Lambda$$

から

$$((\forall g \in \Lambda)(g \leq_\Delta p)$$

となり矛盾。よって

$$p \leq q \ and \ q \in \Gamma \Rightarrow p = q$$

よって p は極大元
[**証明終**]
　この命題から以下が得られます。

ツォルン (Zörn) の補題
　順序集合 Γ の任意の全順序部分集合 Λ が Γ で上に有界であるとする．このとき Γ には極大元が存在する．
　[**証明**] 整列順序集合は全順序集合であり
　補題の前提条件　$\Rightarrow$ 命題の前提条件　$\Rightarrow$　極大元の存在となっています。
　[**証明終**]

1.11.5　同型定理

[**同型定理**]

E, F : 整列集合 $\Rightarrow$
$(\exists F_1 \subseteq F\ and\ F$ の切片$)(\exists_1 f)(f : E \to F_1$は整列順序について同型$)$
$or\ (\exists E_1 \subseteq E\ and\ E$ の切片$)(\exists_1 f)(f : E_1 \to F$ は整列順序について同型$)$

[証明]

一意性

$F_1 \subseteq F\ and\ F$ の切片$)$，$f, g : ErightarrowF_1$は整列順序について同型

とするとき

$$G = \{y | y \in E\ and\ f(y) > g(y)\} \neq \phi$$

とすると,$m = min(G)$ が存在する。

$$\begin{aligned}
&x < m \Leftrightarrow x \notin G \\
&\Rightarrow f(x) \leq g(x) \\
&\Rightarrow f(x) \leq g(x) < g(m) \quad (g\ \text{は真に単調増加}) \\
&\Rightarrow f(x) \leq g(x) < g(m) < f(m) \quad (m \in G)
\end{aligned}$$

となり矛盾。よって

$$G = \phi$$

すなわち,

$$(\forall x \in E)(f(x) \leq g(x))$$

全く同様にして

$$(\forall x \in E)(g(x) \leq f(x))$$

よって

$$f = g$$

存在性 **ツォルン（Zörn）の補題** を使います。

順序の定義

$$\mathcal{K} = \{f : |(\exists E_1 \subseteq E \; and \; F \text{の切片})(\exists F_1 \subseteq F \; and \; F \text{の切片})(\exists f)(f : E_1 \to F_1 \text{は整列順序について同}$$

とおく。$f, g \in \mathcal{K}$ について

$$f \leq g \overset{def}{\Leftrightarrow} G_f \subseteq G_g \; and \; dom(f) \subseteq dom(g) \; and \; Rang(f) \subseteq Rang(g)$$

と定義すると,

$$f \leq g$$

は $\mathcal{K}$ 上の順序。

帰納的集合

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{L} \neq \phi$$

を全順序部分集合とする。

$$\begin{aligned}
&m = (G_m, dom(m), Rang(m)) \\
&G_m = \bigcup_{f \in \mathcal{L}} \\
&dom(m) = \bigcup_{f \in \mathcal{L}} dom(f) \\
&Rang(m) = \bigcup_{f \in \mathcal{L}} Rang(f)
\end{aligned}$$

とおく。

$$x \in dom(m), y \in E, y \leq x$$

とすると $dom(m)$ の定義から $x \in dom(f), f \in \mathcal{L}$ となる f が存在し,
$dom(f)$ は E の切片ゆえ $y \in dom(f) \subseteq dom(m)$
よって

$$(x \in dom(m)\ and\ y \in E\ and\ y \leq x) \Rightarrow y \in dom(m)$$

従って,$dom(m)$ は E の切片。

$$z \in Rang(m), w \in F, w \leq z$$

とすると $Rang(m)$ の定義から $z \in Rang(f), f \in \mathcal{L}$ となる f が存在し,
$Rang(f)$ は F の切片ゆえ $y \in Ran(f) \subseteq Rang(m)$
よって

$$(z \in Rang(m)\ and\ w \in F\ and\ z \leq w) \Rightarrow w \in Rang(m)$$

従って,$Rang(m)$ は F の切片。

$$x, y \in dom(m)\ and\ x < y$$

とすると $dom(m)$ の定義から $x \in dom(f), y \in dom(g), f, g \in \mathcal{L}$ となる f, g が存在し,

$\mathcal{L}$ は全順序部分集合ゆえ

$$(x, y \in dom(f)\ and\ f(x) = m(x)\ and\ f(y) = m(y))\ or \quad (x, y \in dom(g)\ and\ g(x)$$

どちらにしても,f, g は同型写像ゆえ

$$m(x) < m(y)$$

よって

$$(x, y \in dom(m)\ and\ x < y) \Rightarrow m(x) < m(y)$$

よって $m \in \mathcal{K}$
m の構成の仕方から

$$(\forall f \in \mathcal{L})(f \leq m)$$

よって,$\mathcal{K}$ は帰納的。

極大元 $\mathcal{K}$ は帰納的だから,**ツォルン（Zörn）の補題** により $\mathcal{K}$ の極大元 m が存在。この m について

$$dom(m) \neq E \ and \ Rang(m) \neq F$$

とおくと,
$dom(m)$ は E と異なる切片集合ゆえ, $x_m \in E$ が存在し

$$dom(m) = (\leftarrow, x_0) \neq E$$

$Rang(m)$ は F と異なる切片集合ゆえ, $y_0 \in F$ が存在し

$$Rang(m) = (\leftarrow, y_0) \neq F$$

しかし,

$$\begin{aligned}
& l = (G_l, dom(l), Rang(l)) \\
& G_l = G_m \bigcup \{(x_0, y_0)\} \\
& dom(l) = dom(m) \cup \{x_0\} = (\leftarrow, x_0] \\
& Rang(l) = Rang(m) \cup \{y_0\} = (\leftarrow, y_0]
\end{aligned}$$

とおくと l の構成の仕方から

$$l \in \mathcal{K}, m < l$$

となり m が極大元であることの矛盾

[証明終]

[同型定理の系]

1. 整列集合 E について

$$(\forall E_1 \subseteq E \ and \ E \text{ の切片})(\forall f : E \text{ から } E_1 \text{への同型})(f = id_E)$$

2. 整列集合 E, F について

$$(f : E \text{ から } F \text{ の切片 } F_1 \text{への同型 } and \ g : F \text{ から } E \text{ の切片 } E_1 \text{への同型}) \Rightarrow (E_1 = E \ and \ F_1 = F) \ and \ f =$$

3. 整列集合 E について

$$(\forall E_1 \subseteq E)(\exists E_2 \subseteq E \ and \ E \text{ の切片})(\exists f)(f : E_1 \text{から } E_2 \text{への同型})$$

[**系証明**]

1. 恒等写像 id_E は E から E への整列順序についての同型。E 自身も E の切片であるので, 定理で $E = F$ とすれば明らか。

2.

$$(f : E \text{から} F \text{の切片} F_1 \text{への同型}\ and\ g : F \text{から} E \text{の切片} E_1 \text{への同型})$$

とすると, 合成写像

$$g \circ f : E \to E$$

は E から E への整列順序についての同型
よって系 1 から

$$g \circ f = id_E$$

同様に合成写像

$$f \circ g : F \to F$$

は F から F への整列順序についての同型
よって系 1 から

$$f \circ g = id_F$$

よって

$$(E_1 = E\ and\ F_1 = F)\ and\ f = g^{(-1)}\ and\ g = f^{(-1)}$$

3.

$$E_1 \subseteq E$$

をとり, 整列可能性の定理により, 整列順序を入れる。
同型定理によれば, E から E_1 のある切片 F への整列順序についての同型が存在する
かあるいは
E_1 から E のある切片 E_2 への整列順序についての同型が存在する
である。従って,E から E_1 と異なる切片 F への整列順序についての同型が存在しないことを示せばよい。

そのような同型 g と切片 F が存在したとすると,
F は E_1 と異なるから $e \in E_1$ が存在して

$$F = (\leftarrow, e)_{E_1}$$

g は同型ゆえ,E から $F \subseteq E_1$ への真に増加な写像
よって

$$g(e) \in F = F = (\leftarrow, e)_{E_1}$$

から $g(e) <_{E_1} e$

$$G = \{y | y \in E \ and \ g(y) <_{E_1} y\} i$$

とすると,$G \neq \phi$ ゆえ $m = min(G)$ が存在する。

$$\begin{aligned}
& x < m \Leftrightarrow x \notin G \\
& \Rightarrow x \leq_{E_1} g(x) \\
& \Rightarrow x \leq_{E_1} g(x) <_{E_1} g(m) \quad (g \text{ は真に単調増加}) \\
& \Rightarrow x \leq_{E_1} g(x) <_{E_1} g(m) <_{E_1} m \quad (m \in G)
\end{aligned}$$

となり矛盾。