集合の基礎的性質その４

師玉康成

目 次

第1章　集合の基数

議論の厳密性に欠けるところがあるのですが，出来るだけ話を見やすくするために，集合を要素としてもつ集合 Ω を考えます．今後，何かの集合 X を考察するときは X はこの Ω の元とします.
全ての集合が Ω の元という意味ではありません.
さて Ω に次のような同値関係 $\sim$ を定義します.
Ω の元 X, Y　(これらは集合ですが) が同値であるとは X から Y への双射が存在することである.

$$X \sim Y \overset{def}{\Leftrightarrow} (\exists f : X \to Y)(f : \text{双射})$$

問題 5.1
関係 $X \sim Y$ が Ω 上の同値関係であることを示して下さい.

(1) Ω の任意の元 $X \in \Omega$ について $X \sim X$

$$(\forall X \in \Omega)(X \sim X)$$

(2) Ω の任意の二つの元 $X \in \Omega, Y \in \Omega$ について $X \sim Y$ ならば $Y \sim X$

$$(\forall X \in \Omega)(\forall Y \in \Omega)(X \sim Y \Rightarrow Y \sim X)$$

(3) Ω の任意の三つの元 $X, Y, Z \in \Omega$ について
$X \sim Y$ かつ $Y \sim Z$ ならば $X \sim Z$

$$(\forall X \in \Omega)(\forall Y \in \Omega)(\forall Z \in \Omega)((X \sim Y and Y \sim Z) \Rightarrow X \sim Z)$$

Ω の元 X の同値関係 $X \sim Y$ による同値類を $Card(X)$ で表します.

$$Card(X) = \{Y \in \Omega | \ X \sim Y\}$$

$Card(X)$ を基数と呼びます.
これは Ω に属する集合のうち，X からの双射が存在する集合全ての集合で

す.
Ω の同値関係 $X \sim Y$ による商集合を N_{like} で表します.

$$N_{like}{=}\Omega/\sim\ = \{Card(X) \mid X \in \Omega\}$$

自然数モドキの定義　自然数モドキ＝基数の集合

1.1　基数の順序関係

N_{like} の元である基数 $Card(X), Card(Y)$ には次のように順序関係が定義できます.

$$Card(X) \leq Card(Y) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad X \text{ から } Y \text{ への単射が存在する}$$

すなわち

$$Card(X) \leq Card(Y) \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad (\exists f : X \to Y)\ (f : \text{単射})$$

[順序関係であることの証明]

(0)　まず、　$Card(X), Card(Y)$ は同値類ですので, その代表元 X, Y の取り方に上で定義した順序が依存しないことを示す必要があります.

$$X \sim X', Y \sim Y'$$

すなわち,

$$Card(X) = Card(X'), Card(Y) = Card(Y')$$

とすると
$Card(X) \leq Card(Y)$ のとき, 定義から,X から Y への単射 $f : X \to Y$ が存在します.
また $X \sim X$ ’ですから　X から X' への双射 $g : X \to X'$　が存在します.
$Y \sim Y$ ’ですから　Y から Y' への双射 $h : Y \to Y'$　が存在します.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g\downarrow & & h\downarrow \\ X' & \xrightarrow{k} & Y' \end{array}$$

すると

$$k = h \cdot f \cdot g^{-1}$$

という合成写像を作れば，k は X' から Y ’への単射になります.
すなわち

$$Card(X') \leq Card(Y')$$

です.

(1) 恒等写像

$$id_X \colon x \in X \longmapsto x \in X$$

は X から X への双射ですから
$X \sim X$ すなわち $Card(X) = Card(X)$

(2) $Card(X) \leq Card(Y)$ かつ $Card(Y) \leq Card(Z)$ のとき
定義から X から Y への単射 f と Y から Z への単射 g が存在します.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

それらの合成写像 $g \cdot f$ は X から Z への単射です.
よって

$$Card(X) \leq Card(Z)$$

(3) $Card(X) \leq Card(Y)$ かつ $Card(Y) \leq Card(X)$ のとき

$$Card(X) = Card(Y)$$

(3) の証明 定義から X から Y への単射 f と Y から X への単射 g が存在します.
このとき f, g のうちどちらかが双射なら $X \sim Y$
すなわち

$$Card(X) = Card(Y)$$

となります.
以下のようにして f, g から X から Y への双射を作り出します.
$x \in X$ を任意に選びます.
$x_1 = x$ とおき，次のようにして X または Y の元の列 $x_n, n = 1, 2, \cdots$ を構成します.

1. $x_1 \in g(Y) \subseteq X$ なら g による逆像 $g^{-1}(x_1)$ がありますので
$x_2 = g^{-1}(x_1) \in Y$

2. $x_1 \in X \setminus g(Y)$ なら g による逆像 $g^{-1}(x_1)$ が存在しないので
x_1 でこの列の作成手続きは終了
$X \setminus g(Y)$ は X から $g(Y)$ の要素を取り除いた集合です.

3. $x_2 \in f(X) \subseteq Y$ なら f による逆像 $f^{-1}(x_2)$ がありますので
$$x_3 = f^{-1}(x_2) \in X$$

4. $x_2 \in Y \setminus f(Y)$ なら f による逆像 $f^{-1}(x_2)$ が存在しないので
x_2 でこの列の作成手続きは終了.
この手続きを繰り返します.

さて，$x \in X$ から出発して

$$\begin{aligned}
&x_1 = x \in X,\\
&x_2 = g^{-1}(x_1) \in Y,\\
&x_3 = f^{-1}(x_2) \in X,\\
&x_4 = g^{-1}(x_3) \in Y,\\
&\cdots
\end{aligned}$$

というように列
$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$ が作られて行くわけですが
最初の $x \in X$ の取り方によって,

(1) $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$ が無限の列になる。（手続きが無限に繰り返される）

(2) $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$ が奇数個の有限の列になる。（手続きが奇数回目で終了）

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$ が偶数個の有限の列になる。（手続きが偶数回目で終了）

のどれかになります.
X を (1),(2),(3) の場合によって分割します.

$$X_1 = \{x \in X \mid x \text{ から作られる列が (1) の場合 }\}$$
$$X_2 = \{x \in X \mid x \text{ から作られる列が (2) の場合 }\}$$
$$X_3 = \{x \in X \mid x \text{ から作られる列が (3) の場合 }\}$$

まったく同様の議論により
$y \in Y$ を選び $y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots$ をることが可能で
$y \in Y$ から出発して

$$y_1 = y \in Y$$
$$y_2 = f^{-1}(y_1) \in X$$
$$y_3 = g^{-1}(y_2) \in Y$$
$$y_4 = f^{-1}(y_3) \in X$$
$$\cdots$$

というように列が作られて行くわけですが
最初の $y \in Y$ の取り方によって,

(1’) $y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots$ が無限の列になる。（手続きが無限に繰り返される）

(2’) $y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots$ が奇数個の有限の列になる。（手続きが奇数回目で終了）

(3’) $y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots$ が偶数個の有限の列になる。（手続きが偶数回目で終了）

のどれかになります.
Y を (1’),(2’),(3’) の場合によって分割します.

$$Y_1 = \{y \in Y \mid y \text{ から作られる列が } (1') \text{ の場合 }\}$$
$$Y_2 = \{y \in Y \mid y \text{ から作られる列が } (2') \text{ の場合 }\}$$
$$Y_3 = \{y \in Y \mid y \text{ から作られる列が } (3') \text{ の場合 }\}$$

すると
Y_1 の任意の元 y に対して必ず X_1 の元 x が存在して $y = f(\mathrm{x})$ となります．このような元が存在しなければ y は Y_1 の元ではないことになります.
$Y_1 \subseteq f(X_1)$　　また,

$f(X_1) \subseteq Y_1$ も成り立ちます.
　従って，$f(X_1) = Y_1$ となります.

$$f^{-1}(Y_2) = X_3$$
$$f^{-1}(Y_3) = X_2$$
$$g^{-1}(X_2) = Y_3$$
$$g^{-1}(X_3) = Y_2$$

が成り立ちますので，$h : X \to Y$ を

$$h(x) = f(x) \ (x \in X_1 \bigcup X_3)$$
$$h(x) = g^{-1}(x) \ (x \in X_2)$$

で定義すると h は $X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3$ から $Y = Y_1 \bigcup Y_2 \bigcup Y_3$ への双射になります.
よって $X \sim Y$　すなわち　$Card(X) = Card(Y)$ が成り立ちます.
以上から,

$$(\forall X \in \Omega)(Card(X) \leq Card(X))$$
$$(\forall X \in \Omega) \ (\forall Y \in \Omega)$$
$$Card(X) \leq Card(Y) \ and \ Card(Y) \leq Card(Z) \ \Rightarrow \ Card(X) \leq Card(Z))$$
$$(\forall X \in \Omega) \ (\forall Y \in \Omega)$$
$$(Card(X) \leq Card(Y) \ and \ Card(Y) \leq Card(X) \ \Rightarrow \ Card(X) = Card(Y))$$

証明終り

以上で $N\_Like = \{Card(X) \mid X \in \Omega\}$ は順序集合であることが判りました.

1.2 基数の比較可能定理（Bernstein の定理)

さらに N_{Like} はこの順序 $\leq$ で全順序集合になります.
すなわち

$$(\forall X \in \Omega)\ (\forall Y \in \Omega)(Card(X) \leq Card(Y)\ or\ Card(Y) \leq Card(X))$$

これを証明するのには，直感的には以下の議論を行います.

(1)X から元一個を取りだし x_1 とします．次に Y から元一個を取りだし y_1 とします.
x_1 に y_1 を対応させせる写像を f_1 とします。 f_1 は X の要素一個だけからなる部分集合 x_1 から Y の要素一個だけからなる部分集合 y_1 への双射です.

$$f_1\colon \{x_1\} \to \{y_1\}$$

(2) 次に，X から x_1 を取り去った残りの集合から別の元 x_2 を取り出します．さらに Y から y_1 を取り去った残りの集合から別の元 y_2 を取り出します.
そして x_1 に y_1 を，x_2 に y_2 を対応させる写像を f_2 とします.

$$f_2\colon \{x_1, x_2\} \to \{y_1, y_2\}$$

f_1 は X の要素 2 個だけからなる部分集合 x_1, x_2 から Y の要素 2 個だけからなる部分集合 y_1, y_2 への双射です．f_2 は f_1 を拡張したことになります.

(3) こうして，X と Y から順次要素を一個づつ取りだし，写像を拡張して行けば
$f_1\colon \{x_1\} \to \{y_1\}$
$f_2\colon \{x_1, x_2\} \to \{y_1, y_2\}$
$f_3\colon \{x_1, x_2, x_3\} \to \{y_1, y_2, y_3\}$
$f_4\colon \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \to \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$
$\cdots$
という，双射の列ができますが，この手続きは，X の要素が尽きるか，Y の要素が尽きるかによって止まるはずです．

以上の手続きで先に X の要素が尽きればそのとき X から Y への単射が作られていることになり $Card(X) \leq Card(Y)$ で逆に，Y の要素が尽きれば $Card(Y) \leq Card(X)$ です．

しかし，そもそもこの議論は X, Y の要素が $x_1, x_2, \cdots$　や　$y_1, y_2, \cdots$ と番号付けできることを前提にしていますが（数学的帰納法を使うには添え字は自然数でなければならない）、例えば実数の集合の元にはそのような番号付けは出来ません．($Cantor$)

そこで定義域が X の部分集合で，値域が Y の部分集合である双射全体の集合 Γ を考え，その Γ の任意の元

$$f = (G_f, dom(f), Rang(f)), g = (G_g, dom(g), Rang(g))$$

に順序を

$$f \leq g \overset{def}{\Leftrightarrow} G_f \subseteq G_g \ and \ dom(f) \subseteq dom(g) \ and \quad Rang(f) \subseteq Rang(g)$$

で定義してこの順序での Γ の極大元が存在することを示す方法が考えられます．それを可能にするのが以下の ツォルン補題 です．
ツォルン（$Zörn$）の補題
Γ を順序関係が与えられた空でない集合とします．Γ に極大元が存在するかどうかを判定するのに以下の「ツォルン補題」が知られています．

Γ の任意の全順序部分集合 Λ をとるとき，これが Γ で常に上に有界である

とする．このとき Γ には極大元が存在する．

$$
\begin{aligned}
&(\forall\Lambda)(\Lambda \subseteq \Gamma \ and \ (\forall x \in \Lambda)(\forall y \in \Lambda)\ (x \leq y or y \leq x)\\
&\Rightarrow (\exists m \in \Gamma)(\forall x \in \Lambda)\ (m \leq x))\\
&\Rightarrow (\exists m0 \in \Gamma)(m0 \in \Gamma \ and \ (\forall a \in \Gamma)(m0 \leq a \Rightarrow m0 = a))
\end{aligned}
$$

これは，数学的帰納法で，「自然数の任意の空でない部分集合が最小元をもつ」という自然数の集合の整列性を用いましたがこれに相当するものです.

この補題は選択公理から証明できますが，ここでは省略します.

このツォルン補題を用いて，

$$(\forall X \in \Omega)(\forall Y \in \Omega)(Card(X) \leq Card(Y) \ or \ Card(Y) \leq Card(X))$$

すなわち，任意の X, Y の間には X から Y へか，あるいは Y から X への双射が存在することをを証明します.

このために定義域が X の部分集合で，値域が Y の部分集合である双射全体の集合

$$\Gamma = \{f \mid f: \text{は双射} \ and \ dom(f) \subseteq X \ and \ Rang(f) \subseteq Y\}$$

を考え，Γ の任意の元

$$f = (G_f, dom(f), Rang(f)), g = (G_g, dom(g), Rang(g))$$

に順序を

$$
\begin{aligned}
&f \leq g\\
&\overset{def}{\Leftrightarrow} G_f \subseteq G_g \ and \ dom(f) \subseteq dom(g)\\
&\ and \ Rang(f) \subseteq Rang(g)
\end{aligned}
$$

で定義します.

問題 5.2

$f \leq g$　が Γ 上の順序関係を定義していることを示して下さい.

(1)$(\forall f \in \Gamma)$$(f \leq f)$

(2)$\forall f \in \Gamma)$$(\forall g \in \Gamma)$$(\forall h \in \Gamma)$$(f \leq g \quad and \quad g \leq h \quad \Rightarrow f \leq h)$

(3)$\forall f \in \Gamma)$$(\forall g \in \Gamma)$$(f \leq g \quad and \quad g \leq f \ \Rightarrow f = g)$

さて，Λ を Γ の任意の部分集合とし，順序 $f \leq g$ に関して，全順序部分集合とします.
すなわち，

$$(\forall f \in \Lambda)(\forall g \in \Lambda)(f \leq g \quad or \quad g \leq f)$$

　このとき
問題

$$\begin{aligned} m &= (G_m, dom(m), Rang(m)) \\ G_m &= \bigcup_{f \in \Lambda} Gf \\ dom(m) &= \bigcup_{f \in \Lambda} dom(f) \\ Rang(m) &= \bigcup_{f \in \Lambda} Rang(f) \end{aligned}$$

と置くと
$m \in \Lambda$ であり，m は Λ の Γ での上界

$$((\forall f \in Y)(f \leq m))$$

であることを示して下さい.
問題とツォルン補題によって，Γ は極大元 $m_0 \in \Gamma$ をもちます.
このとき
問題

$$dom(m_0) = X \text{ または } Rang(m_0) = Y$$

が成り立っていることを示して下さい.
(ヒント：
背理法によります．$dom(m_0) \neq X$　かつ　$Rang(m_0) \neq Y$　とすると，
Γ の定義から $dom(m_0) \subseteq X$，$Rang(m_0) \subseteq Y$ でしたから，$x_0 \in X$ であ

り，かつ $x_0 \in dom(m_0)$ でない
$y_0 \in Y$ であり，かつ $y_0 \in Rang(m_0)$ でない
x_0，y_0 が存在することになります．しかし，そうすると m_0 を拡張した
—x_0, y_0 を夫々、m_0 の定義域，値域に加え，m_0 のグラフに (x_0, y_0) を追加して—
$k(x) = m_0(x) \quad x \in dom(m_0) k(x_0) = y_0$ 　という双射が定義できますが…)
　問題により

$$m_0\text{は双射で } dom(m_0) = X \text{ または } Rang(m_0) = Y$$

すなわち

$$Card(X) \leq Card(Y) \quad or \quad Card(Y) \leq Card(X)$$

　です.
　[証明終り]

1.3　基数の集合の整列性

　最後に以下の定理を紹介し終わりとします。
　[定理]
$\mathbf{E}$ を基数の集合とするとき,$\mathbf{E}$ は順序 $Card(X) \leq Card(Y)$ について整列順序集合である。

　[証明]

　集合族

$$(X_S), S \in S \in \mathbf{E}$$

を

$$\prod_{S \in \mathbf{E}} S$$

の元から選びます。

$$S \in \mathbf{E}$$

とすると $X \in \Omega$ が存在して

$S = Card(X), X_S \in Card(X)$ (すなわち, $(\exists f)(f : X_S \to X \; and \; f :$ 双射$)$

です。

$$\mathbf{F} = \bigcup_{S \in \mathbf{E}} X_S$$

とおくと,

$$(\forall S \in S \in \mathbf{E})(\exists S_F \subseteq \mathbf{F})(S = Card(S_F))$$

整列可能性定理により $\mathbf{F}$ には整列順序

$$x \leq_F y, \quad x, y \in \mathbf{F}$$

が定義される。

また, 同定理の系によれば $\mathbf{F}$ のべき集合

$$\mathcal{B}(\mathbf{F}) = \{K | K \subseteq \mathbf{F}\}$$

について,

$$(\forall K \in \mathcal{B}(\mathbf{F}))(\exists L : L \subseteq \mathbf{F} \ and \ : \mathbf{F} \text{ の切片})Card(K) = Card(L)$$

$$\{L | L \subseteq \mathbf{F} \ and \ \mathbf{F} \text{ の切片 }\}$$

は集合の包含関係の順序について整列集合であり, その任意の空でない部分集合は最小元をもつので, 写像

$$\tau : S \in \mathbf{E} \mapsto min\{L | L \subseteq \mathbf{F} \ and \ \mathbf{F} \text{ の切片 } and \ S = Card(L)\}$$

が定義される。

このとき,

$$\begin{aligned}
&Card(X), Card(Y) \in \mathbf{E} \ and \ Card(X) \leq Card(Y) \\
&\Leftrightarrow \\
&Card(X), Card(Y) \in \mathbf{E} \ and \ \tau(Card(X)) \subseteq \tau(Card(Y))
\end{aligned}$$

実際,

$$\tau(Card(X)) \in \{L | L \subseteq \mathbf{F} \ and \ \mathbf{F} \text{ の切片 } and \ Card(X) = Card(L)\}$$

から

$$Card(\tau(Card(X))) = Card(X)$$

同様に

$$Card(\tau(Card(Y))) = Card(Y)$$

よって,

$$\begin{aligned}
&\tau(Card(X)) \subseteq \tau(Card(Y)) \\
&\Rightarrow Card(\tau(Card(X))) \leq Card(\tau(Card(Y))) \\
&\Rightarrow Card(X) \leq Card(Y)
\end{aligned}$$

逆に

$$Card(X) \leq Card(Y)$$

とすると,

$$Card(\tau(Card(Y))) = Card(Y)$$

より,

$$D \subseteq \tau(Card(Y))$$

が存在して

$$card(D) = Card(X)$$

第 4 章の**整列集合の同型定理の系 3** によれば, $\tau(Card(Y))$ 切片,K が存在して

$$Card(K) = Card(D) = Card(X)$$

従って

$$\tau(Card(X)) \subseteq K \subseteq \tau(Card(Y))$$

よって

$$Card(X) \leq Card(Y) \Rightarrow \tau(Card(X)) \subseteq \tau(Card(Y))$$

よって

$$\begin{aligned}
&Card(X), Card(Y) \in \mathbf{E} \ and \ Card(X) \leq Card(Y) \\
&\Leftrightarrow \\
&Card(X), Card(Y) \in \mathbf{E} \ and \ \tau(Card(X)) \subseteq \tau(Card(Y))
\end{aligned}$$

後者の関係は整列順序であるから,

$$Card(X), Card(Y) \in \mathbf{E} \ and \ Card(X) \leq Card(Y)$$

も整列順序

[**証明終**]