集合の基礎的性質その５

師玉康成

目 次

第1章　基数の演算

前章までに, 議論の厳密性に欠けるところがあるのですが, 集合を要素としてもつ集合 Ω を考え、何かの集合 X を考察するときは X はすべてこの Ω の元としました。

Ω の元 X, Y の同値関係 $X \sim Y$ を

$$X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ から } Y \text{ への双射が存在する。}$$

で定義しました。この同値関係による Ω の元 X の同値類を $Card(X)$ で表し基数と呼びました。

$$Card(X) = \{Y \in \Omega | X \sim Y\}$$

基数 $Card(X), Card(Y)$ には次のように順序関係が定義できます。

$$Card(X) \leq Card(Y) \quad \Leftrightarrow \quad \text{「} X \text{ から } Y \text{ への単射が存在する」}$$

この順序により基数の集合

$$\mathbf{N}_{like} = \{Card(X) \mid X \in \Omega\}$$

は整列順序集合になります。以下基数の演算を定義しますがこれは $\mathbf{N}_{like}$ 上の演算の定義にもなっています。

1.1　加算

基数 $Card(X), Card(Y)$ の加算を次のように定義できます。
まず, a, b を $a \neq b$ として

$$\{a\} \times X = \{(a, x) \mid x \in X\}$$

$$\{b\} \times Y = \{(a, y) \mid y \in Y\}$$

を作ります。$a \neq b$ ゆえ

$$\{a\} \times X \cap \quad \{b\} \times Y \quad = \phi$$

です。

$$Card(X)+Card(Y)=Card(\{a\}\times X\quad\cup\quad\{b\}\times Y)$$

と定義します。これは $Card(X), Card(Y)$ の代表元の取り方に依存しません。[証明] $X\sim X',\quad Y\sim Y'$　すなわち、

$$Card(X)=Card(X'),\quad Card(Y)=Card(Y')$$

とすると、

$X\sim X'$ より　双射 $f:X\rightarrow X'$ が存在します。同様に $Y\sim Y'$ より双射 $g:Y\rightarrow Y'$ が存在します。

このとき写像

$$h:(a,x')\in\{a\}\times X'\mapsto(a,\ \mathrm{f}^{(}-1)(x'))\in\{a\}\times X$$
$$k：(b,\ \mathrm{y}')\in\{b\}\times Y'\mapsto(b,\ \mathrm{f}^{(}-1)(x'))\in\{b\}\times Y$$

を定義すると、h、k は双射で

$$\{a\}\times X\quad\cap\quad\{b\}\times Y\quad=\phi$$
$$\{a\}\times X'\cap\quad\{b\}\times Y'\quad=\phi$$

から

$$\{a\}\times X'\cup\quad\{b\}\times Y'$$

から

$$\{a\}\times X\cup\quad\{b\}\times Y$$

への双射 j

が

$$j(s)=h(s), s\in\{a\}\times X'$$
$$j(s)=k(s), s\in\{a\}\times Y'$$

で定義されます。よって

$$\{a\}\times X'\cup\quad\{b\}\times Y'\sim\{a\}\times X\cup\quad\{b\}\times Y$$

すなわち

$$Card(\{a\}\times X'\cup\quad\{b\}\times Y')=Card(\{a\}\times X\cup\quad\{b\}\times Y)$$

[証明終り]

問６１ (可換則, 結合則)
以下を証明してください。

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad X \cap Y = \phi \text{なら} Card(X) + Card(Y) = Card(X \cup Y)\\
&(2)\quad Card(X) + Card(Y) = Card(Y) + Card(X)\\
&(3)\quad Card(X) + (Card(Y) + Card(Z)) = (Card(X) + Card(Y)) + Card(Z)
\end{aligned}
$$

特に

$$Card(X) + Card(\phi) = Card(\phi) + Card(X) = Card(X)$$

となります。
空集合 ϕ の基数 $Card(\phi)$ を 0 で表します。

$$Card(X) + 0 = 0 + Card(X) = Card(X)$$

少し技巧的ですが
同様に

$$
\begin{aligned}
&Card(\{\phi\}) = 1\\
&Card(\{\phi, \{\phi\}\}) = 2\\
&Card(\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}) = 3\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

と定義します。

$$
\begin{aligned}
&Card(\{a\}) = 1\\
&Card(\{a, b\}) = 2 \qquad \text{ただし、} a \neq b\\
&Card(\{a, b, c\}) = 3 \quad \text{ただし、} a \neq b, a \neq c, b \neq c\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

が成立っています。
$X_i, i \in I$ の基数の $Card(X_i), i \in I$ について

$$\Sigma_{i \in I} Card(X_i) \quad = Card(\bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i)$$

と定義します。

1.2　乗算

基数 $Card(X), Card(Y)$ の乗算を次のように定義できます。

$$Card(X) \cdot Card(Y) = Card(X \times Y)$$

問 6.2(可換則、結合則、単位元１)
以下を証明してください。

(0)　上の乗算の定義は Card(X)、Card(Y) の代表元の取り方に依存しません。
$X \sim X'$　$Y \sim Y'$　すなわち、

$$Card(X) = Card(X'), Card(Y) = Card(Y')$$

すると、

$$Card(X \times Y) = Card(X' \times Y')$$

を証明してください。

(1)

$$Card(X) \cdot Card(Y) = Card(Y) \cdot Card(X)$$

(2)

$$Card(X) \cdot (Card(Y) \cdot Card(Z)) = (Card(X) \cdot Card(Y)) \cdot Card(Z)$$

(3)

$$Card(X) \cdot 1 = 1 \cdot Card(X) = Card(X)$$

$X_i, i \in I$ の基数の $Card(X_i), i \in I$ について

$$\prod_{i \in I} Card(X_i) = Card(\prod_{i \in I} \{i\} \times X_i)$$

と定義します。
Y^X で X から Y への関数のグラフ

$$\{G_f | f : X \to Y\}$$

を表すことにします。

1.3 べき乗

基数 $Card(Y)$ の $Card(X)$ 乗を次のように定義できます。

$$Card(Y)^{Card(X)} = Card(Y^X)$$

問題 6.3(指数法則)
以下を証明してください。

(0) 上の定義は $Card(X), Card(Y)$ の代表元の取り方に依存しません。
$X \sim X' \quad Y \sim Y'$ すなわち、

$$Card(X) = Card(X'), Card(Y) = Card(Y')$$

とすると、

$$Card(Y^X) = Card({Y'}^{X'})$$

を証明してください。

(1)

$$Card(Y)^{Card(X)} \cdot Card(Y)^{Card(Z)} = Card(Y)^{Card(X)+Card(Z)}$$

(2)

$$Card(Y)^{Card(X)^{Card(Z)}} = Card(Y)^{Card(X) \cdot Card(Z)}$$

(3)

$$Card(Y)^2 = Card(Y) \cdot Card(Y)$$

1.4 有限集合, 無限集合

集合 X の基数 $Card(X)$ が

$$Card(X) \neq Card(X) + 1$$

となるとき X を有限集合といいます。そうでないものを、無限集合といいます。

直感的には、X の要素の数が有限なら、それに新しく 1 個別の元を加えたら、X の要素の数は、元の要素の数と異なる +1 という意味で、逆にそういう性質の集合を無限集合と呼ぶということです。このような集合の存在は第 1 章で述べた無限集合の公理無限集合の存在公理

$$(\exists X)(Card(X) = Card(X) + 1)$$

によって保証されます。

1.5　連続体仮説

X の部分集合全体を $P(X)$ で表します。

$$P(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$$

よく知られていますように

$$P(X) \sim \{0, 1\}^X$$

であり

$$Card(P(X)) = 2^{Card(X)}$$

です。

このとき

$$x \in X \mapsto \{x\} \in P(X)$$

は単射ですから

$$Card(X) \leq Card(P(X)) = 2^{Card(X)}$$

が成り立っています。

さらに

$$Card(X) \neq Card(P(X))$$

です。

[証明]

$Card(X) = Card(P(X))$ とすると

X から $P(X) = \{Y|Y \subseteq X\}$ への双射 f が存在します。

任意の $x \in X$ に対して $f(x) \subseteq X$ ですから、次のような集合

$$Y = \{x \in X | not(x \in f(x))\}$$

を考えます。しかし、

$Y \subseteq X$ ゆえ、$Y \in P(X)$ であり f は双射でしたからある $x_0 \in X$ が存在して $f(x_0) = Y$ です。

すると、$x_0 \in f(x_0)$ なら　Y の定義から　$not(x_0 \in f(x_0))$

$not(x_0 \in f(x_0))$ なら Y の定義から $x_0 \in Y$ よって $x_0 \in f(x_0)$ となり、矛盾が生じます。

この矛盾は $Card(X) = Card(P(X))$ としたことによります。[証明終り]

以上から

$$Card(X) < 2^{Card(X)}$$

が判ります。
ここで

$$Card(X) \leq Card(Z) \leq 2^{Card(X)}$$

となる $Card(Z)$ が存在するだろうか？という問題がでてきます。
無論、X が有限集合なら、

$$Card(X) \leq Card(Z) \leq 2^{Card(X)}$$

となる $Card(Z)$ は存在します。
自然数 N の集合について $P(N)$ は実数の集合 R と同値すなわち、

$$Card(R) = 2^{Card(N)}$$

であることが知られています。また

$$Card(X) = Card(N)$$

なる集合 X を可算集合、そうでない無限集合を、非可算集合といいます。

$$Card(N) \leq Card(Z) \leq Card(R) = 2^{Card(N)}$$

となる $Card(Z)$ は存在しないであろうという仮説が調べられました。

連続体仮説と呼ばれています。その結果は、従来の数学の公理系で、この仮説を肯定しても、否定しても矛盾のない、数学が展開できるという、コーヘンの「連続体仮説の独立性」の証明です。

ここでは、詳しく、述べませんが、要するに他の公理からは証明できないので、これも一つの公理として、数学の公理系に加えるべしとなりました。
問題 6.4

(1) $n \in N \mapsto n \in R$ は N から R への単射なので

$$Card(N) \leq Card(R)$$

は直に判ります。

$$Card(N) \neq Card(R)$$

は有名なカントールの対角線論法で証明できます。カントールの対角線論法を扱った教科書には大抵出ていますので調べてください。

(2) Q を有理数全体の集合とすると、

$$Card(N) = Card(Q)$$

であることも知られています。これも基数を扱った教科書には大抵出ていますので調べてください。

(3)

$$P(X) \sim \{0,1\}^X$$

を証明してください。