記号／命題／述語論理

平成 18 年 5 月 10 日

第1章　命題論理

1.1　記号論理

1.1.1　記号論理とは

論理学は文字通り「論理」の学問であり，推論の方法を研究する学問である。
ここで

ソクラテスが人間であるならば**ソクラテスは死すべきものである。**
ソクラテスは人間である。
ゆえに
ソクラテスは死すべきものである。

というよく知られている三段論法について考える。これらは，助詞の「は」と「が」ではニュアンスが違うが，そのような差異は無視すれば

「ソクラテスは人間である。」
「ソクラテスは死すべきものである。」

というソクラテスについての主張，これらは論理学では**命題**と呼ぶが，これらと

「ならば」

という言葉からなっている。
ここで，

「ソクラテスは人間である。」

という**命題**を記号 $\mathbf{P}$ で，

「ソクラテスは死すべきものである。」

という**命題**を記号 $\mathbf{Q}$ で表し，

「ならば」

という言葉を記号 $\Rightarrow$ で表してみると

$$\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{P}, \qquad \mathbf{Q}$$

という記号列が得られる。ここで「ゆえに」という接続詞を省略している。
最初に $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ が現れ，次にこれの $\Rightarrow$ の左側の $\mathbf{P}$ が並び最後に，$\Rightarrow$ の右側の $\mathbf{Q}$ が現れている。
結局，最初に述べた三段論法は記号の列

$$\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{P}, \qquad \mathbf{Q}$$

の操作とみなすことができる。

この教材で扱う**「記号論理学」**ではこのように事物についての主張である**命題**を記号の列で表現しそれらを操作して，正しい結論を得るための法則を調べる。
記号の規則的な操作を調べるから，それには**数学的**な手段を用いることができる。 このため**記号論理学**は**数理論理学**とも呼ばれている。

1.1.2　命題論理

上の命題 $\mathbf{P}.\mathbf{Q}$ について，それが何を主張しているかどうかには立ち入らず，それらの単に「真」であるか「偽」であるかという性質だけに注目しよう。

「真である」であることを T で,「偽である」であることを F で表すことにしよう。

中学校以来，我々は整数の集合 $\mathbf{Z}$ とか実数の集合 $\mathbf{R}$ を知り，その集合の要素どうしの足し算，掛け算などの演算を学んできた。
特に文字式の演算では， それらの集合の 0 や 1 など具体的な要素を用いる替わりに，不特定な要素を変数 x, y などを用いて表してきた。
さらにそれらに足し算や掛け算をして新しい要素を作り出す操作を

$$x + y \qquad \text{や} \quad x \cdot y$$

と表現してきた。そして演算の交換則

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad x + y = y + x$$

結合則

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \qquad x + (y + z) = (x + y) + z$$

などを学び，これらは代数と呼ばれる数学の分野であることも知った。
これと同様に**記号論理学**のうち**命題論理学**では命題 $\mathbf{P}.\mathbf{Q}$ を集合

$$\mathbf{V} = \{T, F\}$$

上の変数とみなし，先に述べた命題の操作をその $\mathbf{V}$ 上の代数的な演算とみなして考察する。
変数である $\mathbf{P}.\mathbf{Q}$ は**命題変数**と呼ぶ。
命題変数 $\mathbf{P}.\mathbf{Q}$ はそれぞれ，それらの具体的な**「値」**として T または F を持っている。この T と F を真理値と呼ぶ。

1.1.3　記号

代数でそうであったように，命題論理でも「演算」を表すためにいくつかの記号が用いられる。

1. 論理記号
   特に「演算」は**「論理演算」**と呼ばれるが，それには以下の**論理記号**が用いられる。わかりやすいようにそれらの日常語での意味も書いておく。

   (a) ¬ 「... でない」

(b) $\vee$「... または...」と $\wedge$「... かつ...」

(c) $\Rightarrow$「... ならば...」

2. 変数
前述の命題を表す変数記号
$$P, Q, R\ etc.$$
も用いられる。

3. 補助的な記号

(a) 括弧 ( ), { }
代数の演算
$$x + y \cdot z$$
では $\cdot$ が $+$ より優先するという決まりがあるので上の式は先ず $y \cdot z$ が計算され，つぎにこれを x に加える。もし，$x + y$ の方を先に行うのであれば
$$(x + y) \cdot z$$
と書かなければならない。これと同様に上の論理記号の演算の優先順位を $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ と決め，演算の優先順位を変更するのに ( ), { } などの括弧を用いる。

(b) メタ記号 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, etc.$
代数の演算で具体的な式
$$x + y \cdot z$$
の代わりに
$$\phi(x, y)$$
や
$$\phi$$
などという表現を用いることがあるが，命題論理でも同様に具体的な式
$$X \wedge Y$$
などの代わりに
$$\mathcal{P}(X, Y)$$
や単に
$$\mathcal{P}$$
といった記号で表現することがある。これをメタ記号と呼ぶ。他のメタ記号は後で説明する。

1.1.4 論理式

代数でそうであったように，命題論理でも 式が定義される。それは**論理式**と呼ばれる。代数で学んだように，
$$x + y + z \quad x + y \cdot z$$

は式であるが

$$x + y + \quad x + \quad \cdot y \cdot z$$

は式でない。変数記号 x, y と演算記号 $+, \cdot$ を用いて式を作るためには決まりがあった。同様に命題変数の記号 X, Y や論理演算の記号 $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ を用いて論理式を作るのにも次のような規則がある。

(1) T および F は**論理式**である。

(2) 個々の命題変数は**論理式**である。

(3) $\mathcal{A}$ が**論理式**ならば、$\neg\mathcal{A}$ は**論理式**である。

(4) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が**論理式**ならば、

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$$

は、いずれも**論理式**である。

上の定義では T と F 以外具体的な論理式は出てこない。$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は不特定な論理式を表すメタ記号であって，具体的な論理式ではない。しかし，これらの規則で無数の論理式を作りだすことができる。例えば

命題変数 $X, \quad Y.$ と真理値を表す $T, \quad F$ は論理式である。（規則 (1), (2)）
X, Y に$\neg$を作用させた$\neg X, \quad \neg Y$ も論理式（規則 (3)）
$X, Y, T, F, \neg X, \neg Y$ を $\wedge$ で結合した $X \wedge X, X \wedge \neg X$
$X \wedge T, \quad X \wedge F, \quad X \wedge Y, \quad X \wedge \neg Y$ も論理式（規則 (4)）
$X, Y, T, F, \neg X, \neg Y$ を $\vee$ で結合した $X \vee X, \quad , \cdots$
$X \vee Y, \quad X \vee \neg Y$ も論理式（規則 (4)）
$\cdots$
$X \wedge Y$　と　$X \vee \neg Y$　　を $\Rightarrow$ で結合した
$X \wedge Y \Rightarrow X \vee \neg Y$ も論理式（規則 (4)）
$\cdots$

上の例でも判るように，プログラム言語を学んだ人には馴染みのある**「再帰的」**な定義になっている。命題論理における論理式の全体を $\mathbf{L}$ と書くことにしよう。

1.1.5　基本的な論理演算

整数の集合 $\mathbf{Z}$ 上の演算 $+$ については具体的な数と数の演算が

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 2, \quad \cdots$$

が定義されていた。これと同様に真理値の集合 $\mathbf{V} = \{T, F\}$ 上の論理記号 $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ による演算についても定義を与えよう。$\mathbf{V}$ の要素である真理値は 2 個しかないので，次のように表で定義することができる。

1. 否定 $\neg$
「否定」の日常的な意味からも命題 X に $\neg$ を作用させた $\neg X$ は X が T, F（真，偽）であるときにその反対に F, T（偽，真）となると定めるのが自然である。これを表で表しておこう。

X	$\neg X$
T	F
F	T

2. 論理積 $\wedge$ (「かつ」)
２つの命題 X, Y の真理値が両方とも T(真) のときに限り $X \wedge Y$ の真理値は T（真）となるものと定める。

X	Y	$X \wedge Y$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3. 論理和 $\vee$ (「または」)
２つの命題 X, Y の真理値が少なくともどちらかが T（真）のときに $X \vee Y$ の真理値を T（真）と定める。

X	Y	$X \vee Y$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. 含意 $\Rightarrow$ (「ならば」)
２つの命題 X, Y が与えられたとき，$X \Rightarrow Y$ の真理値をどう定めるかというのは少し工夫がいる。なぜならば命題 X, Y と表されているのはその中身の主張を無視して真理値だけを問題にしているからで通常の

明日の天気が雪　ならば　私は傘をも っ ていく。

といった、命題と命題の中身の関係は無視している。

今日の昼食がカレーライス　ならば　明日は天気

でも，論理式 $X \Rightarrow Y$ の形にはなっている。そこで $X \Rightarrow Y$ の否定を考えることにする。上の例なら

明日の天気は雪　でも（かつ）　私は傘をも っ ていかない

とか

今日の昼食がカレーライス　でも（かつ）　明日は天気でない

いう命題で論理式

$$X \wedge \neg Y$$

である。これの真理値ならば既に示した $\neg$ と $\wedge$ の表を用いて

X	Y	$\neg Y$	$X \wedge \neg Y$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

となる。そこで，$X \Rightarrow Y$ は $X \wedge \neg Y$ の否定として上の表の第四列の値を反転させて

X	Y	$X \Rightarrow Y$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

で定義される。この表は容易に確かめられるように $\neg X \vee Y$ の表とも一致している。

課題　$X \Rightarrow Y$ と $\neg X \vee Y$ の表が一致することを確かめること。

注意しなければならないのは $X \Rightarrow Y$ の否定 $X \wedge \neg Y$ を作り，さらにこれの否定を作っていることである。真理値は真，偽 T, F しかないのでそういうことができた。

貴方を好きでないことはない。

と恋人に言われてもそれ程嬉しくはないだろう。

1.1.6　真理関数

前節 1.1.5 節では真理値の集合 $\mathbf{V} = \{T, F\}$ 上の論理演算として $\neg$,　$\wedge$,　$\vee$,　$\Rightarrow$ を定義した。しかし論理演算はこれ以外にも定義できる。以下これを述べる。
繰り返すが

$$真\ (true)\ T \quad 偽\ (false)\ F \quad \mathbf{V} = \{T, F\}$$

として $\mathbf{V}$ 上の変数を命題変数と呼び $X, Y, \ldots, A, B, \ldots$ などで表した。変数を 1 個や 2 個に限らず n 個の場合を考える。

命題 X, Y の論理積 $X \wedge Y$ は $\mathbf{V}$ の直積集合

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} = \{(T, T), (T, F), (F, T), (F, F)\}$$

から 1.1.5 節の表により $\mathbf{V}$ への関数

$$\phi : (X, Y) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \mapsto X \wedge Y \in \mathbf{V} \tag{1.1}$$

を定義しているものと見なせる。具体的には

$$\begin{aligned} (T, T) &\to T \\ (T, F) &\to F \\ (F, T) &\to F \\ (F, F) &\to F \end{aligned}$$

という対応である。　同様に命題の組 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ から，これらに前節の論理演算を施した場合を含めてなんらかの命題 $\mathcal{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を定義することは写像
真理関数

$$\phi : (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbf{V}^n \mapsto \mathcal{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbf{V} \tag{1.2}$$

を定義しているものと見なせる。これを真理関数と呼ぶことにする。$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の値の取り方が 2^n 通りであり, その各場合に対して関数値 $\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の値の取り方は T あるいは F の 2 通りある。従って真理関数 ϕ の種類は全部で 2^{2^n} 通り定まる。以下に 1 変数と 2 変数真理関数を列挙する。

1. １変数の場合

X	$\phi_1(X)$	$\phi_2(X)$	$\phi_3(X)$	$\phi_4(X)$
T	T	T	F	F
F	T	F	T	F
	T	X	$\neg X$	F

上の表の最下段にはその関数の名称を記してある。「否定」は既に前節で説明した。

(a) $\phi_1(X)$ は X の値の如何に関わらず常に T となる定値関数で T と書かれる。

(b) $\phi_2(X)$ は X そのものである。

(c) $\phi_3(X)$ は X の値と反対の値をとる関数で $\neg X$ と書かれる。

(d) $\phi_4(X)$ は X の値の如何に関わらず常に F となる定値関数で F と書かれる。

2. ２変数の場合

既に前節で述べたものもあるが，表の最下段には１変数真理関数と同様その関数の名称を記してある。

X	Y	$\phi_1(X,Y)$	$\phi_2(X,Y)$	$\phi_3(X,Y)$	$\phi_4(X,Y)$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F
		T	$X \vee Y$		X

X	Y	$\phi_5(X,Y)$	$\phi_6(X,Y)$	$\phi_7(X,Y)$	$\phi_8(X,Y)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F
		$X \Rightarrow Y$	Y	$X \Leftrightarrow Y$	$X \wedge Y$

X	Y	$\phi_9(X,Y)$	$\phi_{10}(X,Y)$	$\phi_{11}(X,Y)$	$\phi_{12}(X,Y)$
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F
				$\neg Y$	

X	Y	$\phi_{13}(X,Y)$	$\phi_{14}(X,Y)$	$\phi_{15}(X,Y)$	$\phi_{16}(X,Y)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F
		$\neg X$			F

1.1.7 恒真式

1.1.5 節では命題変数を $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ 結合した式を論理式と呼んだ。ここではそれを拡張して命題変数を 1.1.6 節で定義した，真理関数のみで結合した式をも論理式と呼ぶことにする。後に論理式は 1.1.5 節で定義したもので総て表せることを示す。例えば

$$\neg\neg X \Leftrightarrow X, \quad X \vee (Y \wedge Z)$$

などである。それらの式のうち,、命題変数の値の如何に関わらす恒に T(真) の値のみをとる式を恒真式という。

定理 1.1　以下は恒真式である。左辺と右辺が

$$\phi_{10}$$

の同値 $\Leftrightarrow$ で結合されているので同値恒真式と呼ぶことにする。

(i) $\neg T \Leftrightarrow F$, $\neg F \Leftrightarrow T$

(ii) $X \wedge T \Leftrightarrow X$, $X \vee F \Leftrightarrow X$

(iii) $X \wedge F \Leftrightarrow F$, $X \vee T \Leftrightarrow T$

(iv) $\neg\neg X \Leftrightarrow X$　（二重否定の法則）

(v) $X \wedge X \Leftrightarrow X$, $X \vee X \Leftrightarrow X$　（巾等律）

(vi) $X \wedge \neg X \Leftrightarrow F$　（矛盾律），　$X \vee \neg X \Leftrightarrow T$　（排中律）

(vii) $X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$, $X \vee Y \Leftrightarrow Y \vee X$　（交換法則）

(viii) $X \vee (Y \vee Z) \Leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z$　（結合法則）

(ix) $X \wedge (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$　（結合法則）

(x) $X \wedge (X \vee Y) \Leftrightarrow X$　（吸収法則）

(xi) $X \vee (X \wedge Y) \Leftrightarrow X$　（吸収法則）

(xii) $X \wedge (Y \vee Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$　（分配法則）

(xiii) $X \vee (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$　（分配法則）

(xiv) $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg X \vee \neg Y$　（ド・モルガンの法則）

(xv) $\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$　（ド・モルガンの法則）

(xvi) $X \Rightarrow Y \Leftrightarrow \neg X \vee Y$

証明

上の論理式は何れも左辺と右辺が $\Leftrightarrow$ で結合されている。

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

で $X \Leftrightarrow Y$ が X, Y とも同じ値のときのみ T になることに注目すれば右辺と左辺の真理表を作ってそれが一致することを確かめればよい。ここでは、(xii) と (xv) と (xvi) についてのみ示し、他は課題とする。

目的の式の右辺と左辺の真理表とともに補助的に、$X \wedge Y$, $\neg(X \wedge Y)$, $\neg X$, $\neg Y$ の真理表も作れば次のようになる。

X	Y	$X \wedge Y$	$\neg(X \wedge Y)$	$X \vee (X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \vee \neg Y$	$\neg X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$
T	T	T	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T	T	T	T

上の表から、(10) の左辺 $X \vee (X \wedge Y)$ と右辺 X の真理表、(14) の左辺 $\neg(X \wedge Y)$ と右辺 $\neg X \vee \neg Y$ の真理表、および、(16) の左辺 $X \Rightarrow Y$ と右辺 $\neg X \vee Y$ の真理表は、確かにそれぞれ一致している。
□

1.1.8 論理式としての等式

中学校以来慣れ親しんでいる文字式の等式

$$(x+y)^2 = x^2 + 2x \cdot y + y^2$$

は左辺と右辺は形の上では異なるが，x, y に任意の値を代入しても一致する。この意味で $=$ が用いられた。同様に論理式の $=$ も定義できる。

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ についての 2 つの論理式

$$\mathcal{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad \mathcal{Q}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

が与えられたとき，これらで定義される 2 つの真理関数

$$\phi : (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \in \mathbf{V}^n \mapsto \mathcal{P}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \in \mathbf{V} \tag{1.3}$$

$$\eta : (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \in \mathbf{V}^n \mapsto \mathcal{Q}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \in \mathbf{V} \tag{1.4}$$

の任意の

$$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \in \mathbf{V}^n$$

について（即ち $\mathbf{V} = \{T, F\}$ での任意の値の組み合わせについて）常に

$$\phi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \eta(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \tag{1.5}$$

が成り立つときに等号 $=$ を用いて

$$\mathcal{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \mathcal{Q}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{1.6}$$

と書くことにする。**定理 1.1** は左辺で定義される論理式と右辺で定義されるそれとが値が常に一致することを示し，従って今定義した $=$ の条件をみたすことになり，以下の自明な結果が得られる。

定理 1.2 以下の論理式としての等式が成り立つ。

(i) $\neg T = F$, $\neg F = T$

(ii) $X \wedge T = X$, $X \vee F = X$

(iii) $X \wedge F = F$, $X \vee T = T$

(iv) $\neg\neg X = X$　（二重否定の法則）

(v) $X \wedge X = X,\ X \vee X = X$　（巾等律）

(vi) $X \wedge \neg X = F$　（矛盾律）,　$X \vee \neg X = T$　（排中律）

(vii) $X \wedge Y = Y \wedge X,\ X \vee Y = Y \vee X$　（交換法則）

(viii) $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$　（結合法則）

(ix) $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$　（結合法則）

(x) $X \wedge (X \vee Y) = X$　（吸収法則）

(xi) $X \vee (X \wedge Y) = X$　（吸収法則）

(xii) $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$　（分配法則）

(xiii) $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$　（分配法則）

(xiv) $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$　（ド・モルガンの法則）

(xv) $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$　（ド・モルガンの法則）

(xvi) $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y$

1.2　標準形

1.2.1　基本式

先に述べたように真理関数を表わす（$X \wedge Y$ とか $X \wedge (X \vee Y)$ などの）式を、（命題論理における）論理式という。

一変数の真理関数については

$$\phi(X) = (\phi(T) \wedge X) \vee (\phi(F) \wedge \neg X) \tag{1.7}$$

$$\phi(X) = (\phi(T) \vee \neg X) \wedge (\phi(F) \vee X) \tag{1.8}$$

が成り立っている。実際，第 (1.7) 式について調べると X に T を代入すれば左辺は $\phi(T)$ であり，右辺は**定理 1.2** の等式を使って

$$\begin{aligned}(\phi(T) \wedge T) \vee (\phi(F) \wedge \neg T) &= (\phi(T)) \vee (\phi(F) \wedge F)\\ &= \phi(T) \vee (F)\\ &= \phi(T)\end{aligned}$$

となり一致する。同様に X に F を代入すれば左辺は $\phi(F)$ であり，右辺は**定理 1.2** の等式を使って

$$\begin{aligned}(\phi(T) \wedge F) \vee (\phi(F) \wedge \neg F) &= (F) \vee (\phi(F) \wedge T)\\ &= \phi(F)\end{aligned}$$

となる。第 (1.8) 式も全く同様である。

第 (1.7) 式を用いれば，２変数の真理関数

$$\begin{aligned}\eta(X,Y) &= (\eta(T,Y) \wedge X) \vee (\eta(F,Y) \wedge \neg X)\\ &= ((\eta(T,T) \wedge Y) \wedge X) \vee ((\eta(T,F) \wedge \neg Y) \wedge X)\\ &\vee ((\eta(F,T) \wedge Y) \wedge \neg X) \vee ((\eta(F,F) \wedge \neg Y) \wedge \neg X)\\ &= (\eta(T,T) \wedge X \wedge Y) \vee (\eta(T,F) \wedge X \wedge \neg Y)\\ &\vee (\eta(F,T) \wedge \neg X \wedge Y) \vee (\eta(F,F) \wedge \neg X \wedge \neg Y)\end{aligned} \tag{1.9}$$

が得られる。同様に第 (1.8) 式を用いると先ず

$$\eta(X,Y) = \{\eta(T,Y) \vee \neg X\} \wedge \{\eta(F,Y) \vee X\} \tag{1.10}$$

を得る。次に少し複雑であるが**定理 1.2** の分配法則

$$X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

により

$$\begin{aligned} \eta(T,Y) \vee \neg X &= \{(\eta(T,T) \vee \neg Y) \wedge (\eta(T,F) \vee Y)\} \vee \neg X \\ &= (\eta(T,T) \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (\eta(T,F) \vee \neg X \vee Y) \end{aligned} \tag{1.11}$$

と

$$\begin{aligned} \eta(F,Y) \vee X &= \{(\eta(F,T) \vee \neg Y) \wedge (\eta(F,F) \vee Y)\} \vee X \\ &= (\eta(F,T) \vee X \vee \neg Y) \wedge (\eta(F,F) \vee X \vee Y) \end{aligned} \tag{1.12}$$

を得る。これらから,

$$\begin{aligned} \eta(X,Y) &= (\eta(T,T) \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (\eta(T,F) \vee \neg X \vee Y) \\ &\wedge \ (\eta(F,T) \vee X \vee \neg Y) \wedge (\eta(F,F) \vee X \vee Y) \end{aligned} \tag{1.13}$$

を得る。

以上の結果を定理としてまとめておこう。

定理 2.1　以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \phi(X) &= (\phi(T) \wedge X) \vee (\phi(F) \wedge \neg X) \\ \phi(X) &= (\phi(T) \vee \neg X) \wedge (\phi(F) \vee X) \\ \eta(X,Y) &= (\eta(T,T) \wedge X \wedge Y) \vee (\eta(T,F) \wedge X \wedge \neg Y) \\ &\vee \ (\eta(F,T) \wedge \neg X \wedge Y) \vee (\eta(F,F) \wedge \neg X \wedge \neg Y) \\ \eta(X,Y) &= (\eta(T,T) \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (\eta(T,F) \vee \neg X \vee Y) \\ &\wedge \ (\eta(F,T) \vee X \vee \neg Y) \wedge (\eta(F,F) \vee X \vee Y) \end{aligned}$$

1.2.2　2 変数式の標準形

さて，上の $\phi(T), \phi(F), \eta(T,T), \eta(T,F), \eta(F,T), \eta(F,F)$ は何れも $\mathbf{V} = \{T,F\}$ の元でありそれぞれの値によって，式がさらに短くなる。

$X \wedge Y$ などを基本積と呼ぶことにすると、以下のように $\eta(X,Y)$ の真理値とそれに付随する基本積の表

X	Y	$\eta(X,Y)$	基本積
T	T	v_1	$X \wedge Y$
T	F	v_2	$X \wedge \neg Y$
F	T	v_3	$\neg X \wedge Y$
F	F	v_4	$\neg X \wedge \neg Y$

を作成し，$\eta(X,Y)$ の真理値 $v_i(i=1,2,3,4)$ が T となる基本積のみの論理和 $\vee$ で結合した論理式に等しいことがわかる。これを主 $\vee$ 標準形という。

また，同様に $X \vee Y$ などを基本和と呼ぶことにすると。以下のように $\eta(X,Y)$ の真理値とそれに付随する基本和の表

X	Y	$\eta(X,Y)$	基本和
T	T	v_1	$\neg X \vee \neg Y$
T	F	v_2	$\neg X \vee Y$
F	T	v_3	$X \vee \neg Y$
F	F	v_4	$X \vee Y$

を作成し，$\eta(X,Y)$ の真理値 $v_i(i=1,2,3,4)$ が F となる基本和のみの論理積 $\wedge$ で結合した論理式に等しいことがわかる。これを主 $\wedge$ 標準形という。

例をみよう。

X	Y	$F(X,Y)$	$G(X,Y)$	基本積	基本和
T	T	F	F	$X \wedge Y$	$\neg X \vee \neg Y$
T	F	T	T	$X \wedge \neg Y$	$\neg X \vee Y$
F	T	T	T	$\neg X \wedge Y$	$X \vee \neg Y$
F	F	T	F	$\neg X \wedge \neg Y$	$X \vee Y$

なる 2 変数真理関数 F, G を主 $\vee$-標準形で表わせば、次のようになる:

[F の主 $\wedge$-標準形]

第 1 行だけに着目する。

第 1 行に対して $\neg X \vee \neg Y$

１項しかないので $\wedge$ で結合するまでもなく。

$$\neg X \vee \neg Y$$

が得られる。

[G の主 $\wedge$-標準形]

第 1,4 行に着目する。第 1 行に対して $\neg X \vee \neg Y$ をつくる。　第 4 行に対して $X \vee Y$
これらを $\wedge$ で結合すれば

$$(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$$

が得られる。□

[F の主 $\vee$-標準形]

第 2,3,4 行に着目する。第 2 行に対して $X \wedge \neg Y$ をつくる。　第 3 行に対して $\neg X \wedge Y$
第 4 行に対して $\neg X \wedge \neg Y$

これらを $\vee$ で結合すれば

$$(\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y)$$

が得られる。

[G の主 $\vee$-標準形]

第 2,3 行に着目する。第 2 行に対して $X \wedge \neg Y$ をつくる。　　第 3 行に対して $\neg X \wedge Y$

これらを $\vee$ で結合すれば

$$(\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge Y)$$

が得られる。□

1.2.3 n 変数式の標準形

n 変数真理関数を表わす論理式についても，前節の 2 変数の方法を拡張して次の定理のように標準形を作ることができる。以下では，表現を簡単にするため

$$X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n \text{を} \bigwedge_{i=1}^{n} X_i \tag{1.14}$$

$$X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_n \text{を} \bigvee_{i=1}^{n} X_i \tag{1.15}$$

と書く。

定理 2.2 ϕ を n 変数真理関数とする。$\{(X_1, \cdots, X_n) | \phi(X_1, \cdots, X_n) = F\}$ を $\{(\bar{\sigma}_{k1}, \bar{\sigma}_{k2}, \cdots, \bar{\sigma}_{kn}) | k = 1, 2, \cdots, m\}$ とし、

$$\bar{\sigma}_{ki}(X_i) = \begin{cases} X_i, & \bar{\sigma}_{ki} = F \text{ のとき} \\ \neg X_i & \bar{\sigma}_{ki} = T \text{ のとき} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

とおけば、ϕ の主 $\bigwedge$ 標準形 (principal disjunctivenormal form) による表現が与えられる。

$$\phi(X_1, \cdots, X_n) = \bigwedge_{k=1}^{m} (\bigvee_{i=1}^{n} \bar{\sigma}_{ki}(X_i)) \tag{1.16}$$

課題

主 $\bigwedge$ 標準形が ϕ を表現する論理式であること、すなわち、

$$\phi(X_1, \cdots, X_n) = \bigwedge_{K=1}^{m} (\bigvee_{i=1}^{n} \bar{\sigma}_{ki}(X_i))$$

が成立することを示せ。

定理 2.2 と相対な次の**定理**も得られる:

定理 2.3 ϕ を n 変数真理関数とする。$\{(X_1, \cdots, X_n) | \phi(X_1, \cdots, X_n) = T\}$ を $\{(\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \cdots, \sigma_{kn} | k = 1, 2, \cdots, m\}$ とし、

$$\sigma_{ki}(X_i) = \begin{cases} X_i, & \sigma_{ki} = T \text{ のとき} \\ \neg X_i & \sigma_{ki} = F \text{ のとき} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

とおけば、ϕ の主 $\vee$-標準形 (principal conjunctive normal form)

$$\phi(X_1, \cdots, X_n) = \bigvee_{k=1}^{m} (\bigwedge_{i=1}^{n} \sigma_{ki}(X_i))$$

が得られる。

主 ∧-標準形 を導くアルゴリズム

与えられた ϕ の真理表から、主 ∧-標準形 を導くアルゴリズムを述べる。

ϕ の真理表

$X_1 \cdots X_n$	$\phi(X_1, \cdots, X_n)$
$T \cdots T$	v_1
$\vdots$	$\vdots$
$F \cdots F$	v_{2^n}

に対し、

(1) ϕ の関数値 v_j が F である行に着目する。（定理の前提から m 行ある。）

(2) (1) で着目した各行について、$i = 1, 2, \cdots, n$ に対し、X_i の値が T ならば $\neg X_i$ を、F ならば X_i をつくってこれらを $\vee$ で結ぶ。（これにより、$K = 1, 2, \cdots, m$ について、$\bigvee_{i=1}^{n} \bar{\sigma}_{ki}(X_i)$ ができる。）

(3) (2) でつくられた m 個の各式を $\wedge$ で結ぶ。（これによって、$\bigwedge_{K=1}^{m}(\bigvee_{i=1}^{n} \bar{\sigma}_{ki}(X_i))$ が得られる。）

課題

$$\phi(X_1, \cdots, X_n) = \bigvee_{K=1}^{m}(\bigwedge_{i=1}^{n} \sigma_{ki}(X_i))$$

が成立することを示せ。

定理 3

全ての真理関数は $\neg, \wedge, \vee$ の 3 種類の論理記号のみを用いた論理式で表現できる。

証明

標準形の**定理 2.2**, **定理 2.3** から明らかである。

さらに以下の定理が成立つ。

定理 4

(1) 全ての論理式（真理関数）は論理記号 $\neg, \wedge$ のみを用いた論理式で表現できる。

(2) 全ての論理式（真理関数）は論理記号 $\neg, \vee$ のみを用いた論理式で表現できる。

証明

(1) の証明：**定理 1.2** の 2 重否定の法則とドモルガンの法則を用いれば

$$X \vee Y = \neg\neg(X \vee Y) = \neg(\neg X \wedge \neg Y)$$

であるから $\vee$ は $\neg$ と $\wedge$ によって表現できる。このことと**定理 4** から (1) が得られる。
(2) の証明：**定理 2.2** のの 2 重否定の法則とドモルガンの法則を用いれば

$$X \wedge Y = \neg\neg(X \wedge Y) = \neg(\neg X \vee \neg Y)$$

このことと**定理 4** から (2) が得られる。
□

1.2.4　よく用いられる真理関数

ここで真理関数のうち良く用いられるものを再度書いておく。

1 変数の真理関数 $\neg$

X	$\neg X$
T	F
F	T

2 変数の真理関数

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \Leftrightarrow Y$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

$\neg$	否定 (negation)	$\neg X$	「X でない」
$\wedge$	論理積 (conjunction)	$X \wedge Y$	「X かつ Y」
$\vee$	論理和 (disjunction)	$X \vee Y$	「X あるいは Y」
$\Rightarrow$	含意 (implication)	$X \Rightarrow Y$	「X ならば Y」
$\Leftrightarrow$	同値 (equivalence)	$X \Leftrightarrow Y$	「X と Y は同値である」

定理 3, **定理 4** によれば論理記号として $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ を持つものを扱えば充分である。1.1.5 節で示したように命題論理で扱う**論理式**は再帰的に定義できる。その定義を再度書いておこう。

(1) T および F は**論理式**である。

(2) 個々の命題変数は**論理式**である。

(3) $\mathcal{A}$ が**論理式**ならば、$\neg\mathcal{A}$ は**論理式**である。

(4) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が**論理式**ならば、

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$$

は、いずれも**論理式**である。

第2章　命題論理の公理系

2.1　命題論理の公理系

命題論理における論理式の全体を $\mathbf{L_g}$ と書くことにしよう。

$\mathbf{L_g}$ の要素である論理式は，いずれもその論理式を表現としてもつ真理関数と考えられる。任意の真理関数は，その独立変数がとり得る値のとり方 (n 変数ならば 2^n 通り) の各々の場合について，有限回の操作でその値 (関数値) を決定できる。

既に述べたが， $\mathbf{L_g}$ の**論理式**の値 (真理関数とみなした場合の関数値) が，(命題変数の 値のとり方のすべてに対して) つねに T であるとき，そのような論理式を**恒真論理式** (tautology) という。

2.1.1　公理系

三角形 ABC の内角の和が１８０°であることを示す平面幾何の証明を思い出そう。これを示すには例えば,

1. 問題の三角形の底辺を BC として，それを右端点 C から適当な長さだけ右へ延長し端点を D としておく。
2. C を通り，斜辺 AB に平行な補助線を引く。A の方向に延ばした端点を E とするので、これは CE となる。
3. 平行線と交差する直線と交わる角度についての性質から

$$
\begin{aligned}
&\angle CAB = \angle ACE \\
&\angle ABC = \angle ECD \\
&\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle ECD + \angle BCA + \angle ACE \\
&\angle ECD + \angle BCA + \angle ACE = 180^\circ \\
&\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ
\end{aligned}
$$

によって内角の和が１８０°であることを示す。

この証明を前節までの記号論理で表現すれば,

1. １点を通ってある直線に平行な直線が存在する。
$$AB \not\!\!/\!\!/ CE$$
2. ２本の平行線と交わる直線がつくる２つの同位角は等しい。
$$AB \,//\, CE \Rightarrow \angle ABC = \angle ECD$$
3. ２本の平行線と交わる直線がつくる２つの錯角は等しい。
$$AB \,//\, CE \Rightarrow \angle CAB = \angle ACE$$
4. 直線は１８０°である。
$$\angle ECD + \angle BCA + \angle ACE = 180$$
5.
$$
\begin{aligned}
&(\angle ABC = \angle ECD \wedge \angle CAB = \angle ACE) \\
&\Rightarrow \\
&(\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle ECD + \angle BCA + \angle ACE)
\end{aligned}
$$
6.
$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180$$

という表現であろう。

1, 2, 3, 4 のような公理と呼ばれる数少ない（自明とされる）論理式から三角形 ABC の内角の和が１８０°ということを表す 6 のような論理式を三段論法と呼ばれる推理規則で導いている。

公理系と呼ばれる $\mathbf{L_g}$ の部分集合 α と推論規則が適当に定められ，恒真論理式が α から推論規則によって導けるような体系を, **命題論理の公理的体系**という。

　中学校時代に学んだ平面幾何学はユーグリッド幾何学と呼ばれているが，それには有名な平行線の公理など，ユーグリッドが選んだいくつかの公理が用いられている。

　ギリシャ時代発明された論理学はこの幾何学の発達とともに発達したと言っても良いだろう。

以下にこの教材で扱う公理系を示す。$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ は任意の $\mathbf{L_g}$ の要素，すなわち論理式とする。**公理系**α として，次の (1) ∼ (15) をとる。

(1) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$

(2) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow [(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})]$

(3) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$

(4) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}$

(5) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow \{(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow [(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}]\}$

(6) $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$

(7) $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$

(8) $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \{(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow [\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})]\}$

(9) $[\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})] \Rightarrow \mathcal{B}$

(10) $[(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow F] \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$

(11) $(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}) \Rightarrow F$

(12) $[(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}] \Rightarrow [\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})]$

(13) $\mathcal{A} \Rightarrow T$

(14) $F \Rightarrow \mathcal{A}$

(15) $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$

2.1.2　推論規則と証明

前節の公理から何らかの記号的な操作によって**証明可能な論理式**が得られるのであるがその操作の規則を**推論規則**とよぶ。命題論理での**推論規則**は，次の**三段論法** (modus ponens) のみである。横線の上の論理式から下の**論理式**が導かれることを表す。

$$\frac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$

証明可能性を定義する。すなわち，$\mathbf{L_g}$ の要素である**論理式**のうち，**証明可能な論理式** (provable formula) を次のように定める:

(1) 公理系の各公理の形の**論理式**は**証明可能**である。

(2) 論理式 $\mathcal{A}$ と論理式 $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ が**証明可能**ならば，(推論規則によって，) 論理式 $\mathcal{B}$ は**証明可能**である。

証明可能な**論理式**の**列**を**「証明」**という。**「証明可能性」**の定義に従えば

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$$

が**「証明」**のとき，各 $\mathcal{A}_k$ は

(1) **公理系**の各公理の形の**論理式**である。

(2) **論理式** $\mathcal{A}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{A}_i$ と $\mathcal{A}_j$ $(i, j < k)$ があり，$\mathcal{A}_j$ は $\mathcal{A}_i \Rightarrow \mathcal{A}_k$ の形をしている。

例えば,

$$\mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}, \quad (\mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})), \quad \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$$

もっと具体的には

$$\begin{aligned}
&1 = 2 \wedge 2 > 6 \Rightarrow 2 > 6 \\
&(1 = 2 \wedge 2 > 6 \Rightarrow 2 > 6) \Rightarrow (2 > 6 \Rightarrow (1 = 2 \Rightarrow 2 > 6)) \\
&2 > 6 \Rightarrow (1 = 2 \Rightarrow 2 > 6)
\end{aligned}$$

は**証明**である。（**証明可能**な論理式を**「定理」**とか**「命題」**と呼ぶこともある。）

「証明」の中で推論規則と公理を何回か適用する共通した手順を**「推論法則」**と呼ぶ。（これ自身は公理系を定義するのに必須ではないが，それを操作する上で便利な手続きをまとめたもの。）以下に推論法則の例を述べる。

［例］

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}} \qquad (\textbf{推論法則:添加})$$

$\mathcal{A}$ が証明可能な論理式ならば $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ も証明可能な論理式であることを表す。
実際，上の「証明」の例の最後に注目すれば

$$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$$

は証明可能であり，$\mathcal{A}$ が証明可能なら推論規則（三段論法）により，$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ も証明可能なことがわかる。
□

$$\frac{\mathcal{A}, \mathcal{B}}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}} \qquad (\textbf{推論法則:論理積})$$

任意の論理式 $\mathcal{C}$ を用いて「添加」により

$$(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{A}, (\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}$$

が証明可能である。また公理 (8) から

$$\{(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{A}\} \Rightarrow [\{(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}\} \Rightarrow \{(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})\}]$$

推論規則により,

$$(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$$

が証明可能である。ところで公理 (15) により

$$\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{C}$$

は公理（当然証明可能な論理式であるから）結局,

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$$

は証明可能な論理式である。□ またこれから直ちに

$$\frac{\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}}{\mathcal{B}\wedge\mathcal{A}}\qquad (\textbf{推論法則:交換})$$

が得られる。同様に

$$\frac{\mathcal{A}\vee\mathcal{B}}{\mathcal{B}\vee\mathcal{A}}\qquad (\textbf{推論法則:交換})$$

も得られる。さらに

$$\mathcal{A}\Rightarrow\neg\neg\mathcal{A}, \neg\neg\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}\ \textbf{推論法則:2重否定}$$

も得られる。

$$\frac{\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}, \mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}}{\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C}}(\textbf{推論法則:推移})$$

これは公理 (2) より

$$(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow[(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C})]$$

が証明可能であり，これと

$$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$$

から推論規則により，

$$(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C})$$

証明可能である。さらにこれと

$$\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$$

とから

$$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C}$$

が証明可能であることで示される。□ 同様に

$$\frac{\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}), \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}}{\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C}}\qquad (\textbf{推論法則:復推移})$$

が証明可能である。これはまず，公理 (8) から

$$(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\Rightarrow[\{\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})\}\Rightarrow\{\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}\wedge(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})\}]$$

これと

$$\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}), \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$$

から

$$\mathcal{A}\Rightarrow\{\mathcal{B}\wedge(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})\}$$

が証明可能であり，さらに公理 (9) の

$$\{\mathcal{B}\wedge(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})\}\Rightarrow\mathcal{C}$$

と前述の**「推移」**により

$$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C}$$

が証明可能であることで示される。□

上述の体系を H と呼ぶことにしよう。($H=$ 公理系$\alpha+$「推論規則」)

$\mathbf{L_g}$ の論理式 $\mathcal{A}$ が**証明可能**であるとは，H において，公理系 α から $\mathcal{A}$ が**推論規**則によって導けることであるから，これを

$$\vdash_H \mathcal{A}$$

と書く。**推論規則**

$$\frac{\mathcal{A}\quad\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$

はこの表記法を用いると，

$$\frac{\vdash_H \mathcal{A}\quad\vdash_H \mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}}{\vdash_H \mathcal{B}}$$

と書くべきである。しかし，どの系で**証明可能**なのか明らかな場合は$\vdash_H$ は省略することにする。

2.1.3　演繹定理

定理 5(演繹定理)

既述の体系 H についてその公理系 α に論理式

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$$

を追加してできる新たな系で論理式 $\mathcal{B}$ が証明可能であるとき，このことを

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \vdash_H \mathcal{B}$$

で表す。さらにこのとき：

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1} \vdash_H \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$$

が成り立つ。また，これを繰り返せば

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-2} \vdash_H \mathcal{A}_{n-1} \Rightarrow (\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B})$$

□

演繹定理の証明　体系 H についてその公理系 α に論理式

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$$

を追加してできる新たな系を H^1 で表し，体系 H についてその公理系 α に論理式

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1}$$

を追加してできる系を H^2 で表す。

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \vdash_H \mathcal{B}$$

は

$$\vdash_{H^1} \mathcal{B}$$

であることを表している。示すべきことは

$$\vdash_{H^2} \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$$

である。

$$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \cdots, \mathcal{B}_{n-1}, \mathcal{B}_n (= \mathcal{B})$$

が H^1 での「証明」とするとき，定義より各 $\mathcal{B}_k$ は次のいずれかである。

(1) $\mathcal{B}_i$ は $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ のうち１つである。

(2) $\mathcal{B}_i$ は公理系 H の各公理の形の論理式である。

(3) 論理式 $\mathcal{B}_k$ の前に論理式 $\mathcal{B}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(i, j < k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は $\mathcal{B}_i \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の形をしている。

そして，

$$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_1, \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_{n-1}, \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_n$$

は H^2 での $\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ を含む「証明」になる。これは k についての帰納法による。

(1) $\mathcal{B}_k$ が $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1}$ のうち１つであれば,「添加」

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}} \qquad \text{(添加)}$$

により，$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ は H^2 で証明可能な論理式になる。$\mathcal{B}_k$ が $\mathcal{A}_n$ 自身ならば，公理 (1) により，

$$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}_n$$

は H^2 で証明可能な論理式である。

(2) $\mathcal{B}_k$ が公理系 H の各公理の形の論理式であるとき，同様に「添加」により，$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ は H^2 で証明可能な論理式である。

(3) 論理式 $\mathcal{B}_k$ の前に論理式 $\mathcal{B}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(i, j < k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は $\mathcal{B}_i \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の形をしているときは，$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の前に，$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_i$ と $\mathcal{A}_n \Rightarrow (\mathcal{B}_i \Rightarrow \mathcal{B}_k)$ とがあることになる。これに「復推移」

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}} \qquad \text{(復推移)}$$

を適用すると $\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ が得られる。□

演繹定理の２，３の応用

$$\neg\mathcal{A} \vdash_H F$$

のとき

$$\vdash_H \mathcal{A}$$

これは，まず

$$\neg\mathcal{A} \vdash_H F$$

から演繹定理により

$$\vdash_H \neg\mathcal{A} \Rightarrow F$$

が得られ，これと公理 (14) により

$$\vdash_H \neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$$

となる。さらに公理 (1) により,

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$$

と公理 (5) から

$$(\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow [(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \{(\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A}\}]$$

が得られる。また，公理 (15) により

$$\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$$

が成り立っている。これらより結局

$$\vdash_H \mathcal{A}$$

□

上の結果を推論規則の形で表現すれば

$$\frac{\neg\mathcal{A} \Rightarrow F}{\mathcal{A}}$$

また論理式の形で表せば

$$(\neg\mathcal{A} \Rightarrow F) \Rightarrow \mathcal{A}$$

である。（いずれも $\vdash_H$ が省略されていることに注意）

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}}(「対偶」)$$

まず，$\vdash_H \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ を仮定する。系 H に $\neg\mathcal{B}$ を追加して得られる系を H^1 とする。さらにこれに $\neg A$ の否定 $\neg\neg A$ を追加した系を H^2 とすると，２重否定により，$\vdash_{H^2} \mathcal{A}$ が，従って $\vdash_{H^2} \mathcal{B}$ が得られる。このことから $\vdash_{H^2} F$ となり，結局 $\vdash_{H^1} \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ が得られる。□

2.1.4　無矛盾性

$\mathcal{G}$ を $\mathbf{L_g}$ の部分集合の論理式の集合

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \cdots, \mathcal{A}_n\}$$

とする。

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \vdash_H \mathcal{B}$$

を簡単のため，

$$\mathcal{G} \vdash_H \mathcal{B}$$

と書くことにする。ある論理式 $\mathcal{B}$ が存在して

$$\mathcal{G} \vdash_H \mathcal{B} \qquad \mathcal{G} \vdash_H \neg\mathcal{B}$$

となるとき，$\mathcal{G}$ は矛盾するという。このような $\mathcal{B}$ が存在しないとき，$\mathcal{G}$ は無矛盾であるという。

定理 6

$\mathcal{G}$ が矛盾すれば，すべての論理式は公理系 $\mathbf{H}$ と $\mathcal{G}$ から証明可能である。すなわち任意の論理式 $\mathcal{C}$ について

$$\mathcal{G} \vdash_H \mathcal{C}$$

証明 $\mathcal{G}$ が矛盾すれば，ある論理式 $\mathcal{B}$ が存在して

$$\mathcal{G} \vdash_H \mathcal{B} \qquad \mathcal{G} \vdash_H \neg\mathcal{B}$$

である。ここで公理 (11) によれば任意の論理式 $\mathcal{C}$ について

$$\vdash_H (\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$$

であり，推論規則「論理積」によれば，

$$\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B}$$

も証明可能である。従って，$\mathcal{C}$ も証明可能になる。

2.1.5　命題計算の完全性定理

体系 H については，次の事実が知られている:

定理 7(命題計算の妥当性) $\vdash_H \mathcal{A}$ ならば $\mathcal{A}$ が恒真論理式である。□ この定理は，命題計算の体系についての**妥当性**と呼ばれるものである。

妥当性の証明 $\vdash_H \mathcal{A}$ が成立すれば $\mathcal{A}$ が恒真論理式であることを示そう。

$\vdash_H \mathcal{A}$ が成り立つとすると，系 H の「証明」である論理式の列

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$$

があって，$\mathcal{A}$ は最後の $\mathcal{A}_n$ と一致しているものとしてよい。各 $\mathcal{A}_i$ は

(1) 公理系の各公理の形の論理式である。この場合，各公理は恒真論理式であるから $\mathcal{A}_i$ は恒真論理式である。

(2) 論理式 $\mathcal{A}_i$ の前に論理式 $\mathcal{A}_j$ と $\mathcal{A}_k$ $(j, k < i)$ があり，$\mathcal{A}_k$ は $\mathcal{A}_j \Rightarrow \mathcal{A}_i$ の形をしている。i より前の論理式は恒真論理式であると仮定すると，$\mathcal{A}_j$ と $\mathcal{A}_j \Rightarrow \mathcal{A}_i$ が真理値 T しかとらないから真理値表

$\mathcal{A}_j$	$\mathcal{A}_i$	$\mathcal{A}_j \Rightarrow \mathcal{A}_i$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

から明らかなように $\mathcal{A}_i$ の真理値は T しか取り得ない。すなわち $\mathcal{A}_i$ は恒真論理式である。□

定理 8(命題計算の無矛盾性) 命題論理の公理系 **H** は無矛盾である。すなわち

$$\vdash_H \mathcal{A} \qquad \vdash_H \neg\mathcal{A}$$

となるような論理式は存在しない。□ この定理は，命題計算の体系についての**無矛盾性**と呼ばれるものである。

無矛盾性の証明 公理系 **H** が矛盾すれば定理 6 により任意の論理式 $\mathcal{C}$ が証明可能である。従って，$\mathcal{C}$ は定理 7 により恒真論理式である。しかるに，**H** の命題変数 X は論理式ではあるが恒真論理式ではない。□

定理 9(命題計算の完全性定理) $\mathcal{A}$ が恒真論理式であることの必要十分条件は，$\vdash_H \mathcal{A}$ が成立することである。□ この定理は，命題計算の体系についての**完全性定理** (completeness theorem) と呼ばれるものである。

完全性定理の証明 $\vdash_H \mathcal{A}$ が成立すれば $\mathcal{A}$ が恒真論理式であることは妥当性の定理で既に証明済みである。逆に $\mathcal{A}$ が恒真論理式であるときに，$\vdash_H \mathcal{A}$ が成立することをいうには次の補題が必要になる。

補題

$\mathcal{A}$ が命題変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ から構成される論理式とする。命題変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に真理値 T, F をふり当て，そのふり当てに対し $\mathcal{A}$ の真理値が T である場合

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots \delta X_n \vdash_H \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}$ の真理値が F である場合

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots \delta X_n \vdash_H \neg\mathcal{A}$$

である。ただし，δX_i は X_i に対する真理値のふり当てが T の場合 X_i，F の場合は $\neg X_i$ とする。□

定理 9 の証明の続き

恒真論理式 $\mathcal{A}$ が命題変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ から構成されるものとする。命題変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に真理値 T, F をどのようにふり当てても，$\mathcal{A}$ の真理値は常に T である。

命題変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ に真理値 T, F どのようにふり当てるしかたは 2^n 通りある。これを辞書式順序で全て列挙し [補題] を適用すると

$$
\begin{aligned}
&X_1, X_2, \cdots, X_n \vdash_H \mathcal{A}\\
&X_1, X_2, \cdots, \neg X_n \vdash_H \mathcal{A}\\
&X_1, X_2, \cdots, \neg X_{n-1}, X_n \vdash_H \mathcal{A}\\
&X_1, X_2, \cdots, \neg X_{n-1}, \neg X_n \vdash_H \mathcal{A}\\
&\cdots\\
&\cdots\\
&\neg X_1, \neg X_2, \cdots, \neg X_n \vdash_H \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

が得られる。最初の 2 式から演繹定理により

$$
\begin{aligned}
&X_1, X_2, \cdots, X_{n-1} \vdash X_n \Rightarrow \mathcal{A}\\
&X_1, X_2, \cdots, X_{n-1} \vdash \neg X_n \Rightarrow \mathcal{A}
\end{aligned}
$$

これから公理 (5) と，公理 (15) を用いて；

$$X_1, X_2, \cdots, X_{n-1} \vdash_H \mathcal{A}$$

が得られる。すなわち X_n が消去された。同様にして順次に 2 式ずつ同じ手順を繰り返せば，X_n が消去された 2^{n-1} 個の式を得る。この 2^{n-1} 個の式から X_{n-1} を 2 式ずつをとり同じ手順を繰り返すと X_{n-1} が消去された 2^{n-2} 個の式を得る。この手順を繰り返せば変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が全て消去され，結局

$$\vdash_H \mathcal{A}$$

を得る。□

補題の証明

論理式 $\mathcal{A}$ がただ 1 つの命題変数 X からなるとき　　X に対するふり当てが T のとき

$$X \vdash_H X$$

F のとき

$$\neg X \vdash_H \neg X$$

これは公理の (1) から容易に示される。

これ以外の場合は，$\mathcal{A}$ は $\neg\mathcal{B}, \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ の形をしている。この場合，部分式 $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ についてはこの補題が成り立つものとする。

$\mathcal{A}$ が $\neg\mathcal{B}$ である場合

$\mathcal{A}$ の値が T のとき $\mathcal{B}$ の値は F であるから

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \neg\mathcal{B}$$

$\mathcal{A}$ の値が F のとき $\mathcal{B}$ の値は T であるから

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \mathcal{B}$$

$\mathcal{B}, \neg\mathcal{B}$ はそれぞれ $\mathcal{A}$ 及び $\neg\mathcal{A}$ である。

$\mathcal{A}$ が $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ である場合

$\mathcal{A}$ の値が T のとき $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ の少なくともどちらか一方の値は T であるから，$\mathcal{B}$ の値が T としても一般性を失わない。このとき

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \mathcal{B}$$

が成り立っている。これと公理の (3)

$$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$$

により

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$$

$\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ は $\mathcal{A}$ に他ならない。

$\mathcal{A}$ の値が F のとき $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ の値はともに F でなければならない。このとき

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \neg\mathcal{B}$$

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \neg\mathcal{C}$$

これに推論法則の「論理積」

$$\frac{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}{\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}}$$

を用いて

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \neg\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{C}$$

を得る。$\neg\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{C}$ は $\neg\mathcal{A}(= \neg(\mathcal{B} \vee \mathcal{C}))$ に他ならない。

$\mathcal{A}$ が $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ である場合

$\mathcal{A}$ の値が T のとき $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ の値はともに T でなければならない。このとき

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \mathcal{B}$$

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \mathcal{C}$$

これに推論法則の「論理積」

$$\frac{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}{\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}}$$

を用いて

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$$

を得る。$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ は $\mathcal{A}$ に他ならない。

$\mathcal{A}$ の値が F のとき $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ の少なくともどちらか一方の値は F であるから，$\mathcal{B}$ の値が F としても一般性を失わない。このとき

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \neg\mathcal{B}$$

が成り立っている。これと公理の (3)

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$$

により

$$\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n \vdash_H \neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{C}$$

$\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{C}$ は $\neg\mathcal{A} = \neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ に他ならない。

□

第3章　述語論理

3.1　述語論理

命題論理では，命題を真偽だけをもつ変数として，内容には立ち入らなかった。

$$1 = 1$$
$$2 > 1$$
「任意の x に対して　$x = x$」

などは総て，真（$T \in \mathbf{V}$）として同一のものとして扱った。これに対し，**述語論理** ($predicatelogic$) では命題の内部構造も考察の対象になる。

ここで再び，第一章で述べた三段論法

ソクラテスが人間であるならば**ソクラテスは死すべきものである。**
ソクラテスは人間である。
ゆえに
ソクラテスは死すべきものである。

について考える。命題論理では命題である

「ソクラテスは人間である。」
「ソクラテスは死すべきものである。」

というソクラテスについての主張を $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ で表し，

$$\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{P}, \qquad \mathbf{Q}$$

という記号列が得られるとしてその記号列の操作により正しい結論を得る方法を調べた。

上のソクラテスに関する命題について「ソクラテス」の固有名詞の代わりに不特定な対象を表す文字 x を用いた

「x は人間である。」
「x は死すべきものである。」

に換えてみよう。そしてこれらをそれぞれ

$$\mathbf{Is\_human}(x), \quad \mathbf{Is\_motal}(x)$$

で表す。$\mathbf{Is\_human}$,　$\mathbf{Is\_motal}(x)$ はそのままでは真理値が決まらない。x に具体的な ソクラテス や 狸 を代入して初めて定まる。即ち，前章までに定義した命題になる。

$$\mathbf{Is\_human}(\text{ソクラテス}), \quad \mathbf{Is\_motal}(\text{ソクラテス})$$

は何れも T(真) であるが,

$$\mathbf{Is\_human}(\text{狸}),\quad \mathbf{Is\_motal}(\text{狸})$$

は前者は F(偽) であり，後者は T(真) となる。

同様に

$$\mathbf{Is\_human}(x) \Rightarrow \mathbf{Is\_motal}(x)$$

の真理値はそのままでは確定できない。しかし,

「任意の x について $\mathbf{Is\_human}(x) \Rightarrow \mathbf{Is\_motal}(x)$」

という主張は T(真) である。$\mathbf{Is\_human}(x)$,　$\mathbf{Is\_motal}(x)$ のように x に特定の対象を代入したときに真偽が確定するものを述語という。述語論理学では前章までの命題だけではなくこのような述語を含めた正しい推論の方法を考察する。

3.1.1　n 項述語

命題論理では真理値の集合である $\mathbf{V} = \{T, F\}$ が定義されたが，述語論理ではさらに，何らかの対象の集合 $\mathbf{D}$ も定義される。これは具体的には整数の集合 $\mathbf{Z}$ や実数の集合 $\mathbf{R}$ であったり，あるいは日本人全体の集合といったものを表したりする。$\mathbf{D}$ は空でないことが要求される。この $\mathbf{D}$ から $\mathbf{V} = \{T, F\}$ への写像

$$\mathbf{P} : x \in \mathbf{D} \mapsto \mathbf{P}(x) \in \mathbf{V} \tag{3.1}$$

を **1 変数の命題関数** (propositional function) と呼ぶ。$\mathbf{P}(x)$ を **1 変数の述語** (predicate) と呼ぶ。

領域 $\mathbf{D}$ が複数の集合の直積集合 $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2 \times \cdots \times \mathbf{D}_n (= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbf{D}_i\})$ である場合も考えることできる。これを明示したいときは，$\mathbf{P}$ を n 変数の命題関数，その表現を n 変数の述語という。

また，集合 $\mathbf{D}$ を $\mathbf{P}$ の**対象領域** (objectdomain) と呼び，$\mathbf{D}$ の各要素を $\mathbf{P}$ の**対象**という。すなわち，$\mathbf{P}$ は対象領域 $\mathbf{D}$ 上で定義された命題関数であり，$\mathbf{P}(x)$ は D 上の述語である。

たとえば，自然数の全体 $\mathbf{N}$ で定義される写像

$$prime : x \in \mathbf{N} \mapsto prime(x) \in \mathbf{V}$$

を

$$prime(x) = \begin{cases} T & x \text{ が素数のとき} \\ F & x \text{ が素数でないとき} \end{cases}$$

と定義すれば，この写像は $\mathbf{N}$ 上の (1 変数) 命題関数であり，$prime(x)$ は $\mathbf{N}$ 上の (1 変数) 述語である。この述語は

x は素数である

という主張を意味する。$prime(x)$ は，x が素数のとき T, 素数でないとき F である。一般に，命題関数

$$\mathbf{P} : x \in \mathbf{D} \mapsto \mathbf{P}(x) \in \mathbf{V}$$

に対し，$\mathbf{P}(x)$ を「$x(\in \mathbf{D})$ は $\mathbf{P}$ である」と読む。

3.1.2 述語の論理和・論理積・否定

命題関数 $\mathbf{P} : x \in \mathbf{D} \mapsto \mathbf{P}(x) \in \mathbf{V})$ に対して

$$x \in \mathbf{D} \mapsto \neg\mathbf{P}(x) \in \mathbf{V} \tag{3.2}$$

なる命題関数を $\neg\mathbf{P}(x)$ で表す。命題関数 $\mathbf{P}, \mathbf{Q} : \mathbf{D} \to \mathbf{V}$ が与えられたとき，

$$x \in \mathbf{D} \mapsto \mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x) \in \mathbf{V} \tag{3.3}$$

なる命題関数を $\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)$ で表す。

同様に，

$$\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x), \mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x), \quad \mathbf{P}(x) \Leftrightarrow \mathbf{Q}(x) \tag{3.4}$$

などの述語をつくることもでき，$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ の性質については，**定理 2.2** と同様のことがらが成立する。

n 変数の述語の変数のうち，k 個 $(k < n)$ の変数に具体的な対象を代入して得られる新しい述語は，$(n - k)$ 変数になる。たとえば，事実上の変数 x, y をもつ述語 $x < y$ は 2 変数の述語であり，$x < 2\pi$ は 1 変数の述語である。また，$3 < 2\pi$ は 0 変数の述語，すなわち命題である。

3.1.3　限定記号

1 変数命題関数 $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} : x \in \mathbf{D} \mapsto \mathbf{P}(x) \in \mathbf{V} \tag{3.5}$$

が与えられたとき, 命題

$$\bigwedge_{x \in \mathbf{D}} \mathbf{P}(x) \tag{3.6}$$

を

$$(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \qquad \text{あるいは } (\forall x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x))$$

で表そう。ここで $\mathbf{D}$ が有限個の要素からなる場合, すなわち

$$\mathbf{D} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\} \tag{3.7}$$

の場合は

$$\bigwedge_{x \in \mathbf{D}} \mathbf{P}(x) = \mathbf{P}(a_1) \wedge \mathbf{P}(a_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n) \tag{3.8}$$

であり,$\mathbf{D}$ が無限集合の場合は $\mathbf{D}$ の要素 x について $\mathbf{P}(x)$ の総てに亘る論理積を表している。

この命題の真理値は,

$$(\forall x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x)) = \begin{cases} T & \text{任意の } x \in \mathbf{D} \text{ に対し } \mathbf{P}(x) = T \text{ のとき} \\ F & \mathbf{P}(x) = F \text{ になる } x \in \mathbf{D} \text{ が存在するとき} \end{cases} \tag{3.9}$$

となる。領域 $\mathbf{D}$ が明白なときは $\in \mathbf{D}$ を省略する。$(\forall x)(\mathbf{P}(x))$ は「任意の (すべての) x に対し $\mathbf{P}(x)$ が成立する」ことを表している。

また

$$\bigvee_{x \in \mathbf{D}} \mathbf{P}(x) \tag{3.10}$$

を

$$(\exists x)(\mathbf{P}(x)) \qquad \text{あるいは } (\exists x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x))$$

で表そう。ここで $\mathbf{D}$ が有限個の要素からなる場合, すなわち

$$\mathbf{D} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\} \tag{3.11}$$

の場合は

$$\bigvee_{x \in \mathbf{D}} \mathbf{P}(x) = \mathbf{P}(a_1) \vee \mathbf{P}(a_2) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_n) \tag{3.12}$$

であり,$\mathbf{D}$ が無限集合の場合は $\mathbf{D}$ の要素 x について $\mathbf{P}(x)$ の総ての論理和である。この命題の真理値は

$$(\exists x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x)) = \begin{cases} T & \mathbf{P}(x) = T \text{ となる } x \in \mathbf{D} \text{ が存在するとき} \\ F & \text{任意の } x \in \mathbf{D} \text{ に対し } \mathbf{P}(x) = F \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.13}$$

である。上と同様に領域 $\mathbf{D}$ が明白なときは $\in \mathbf{D}$ を省略する。

$$(\exists x)(\mathbf{P}(x))$$

は「$\mathbf{P}(x)$ を満たす x が存在する」ことを表わしている。

$\mathbf{P}(x)$ が 1 変数の述語の場合は，$(\forall x)(\mathbf{P}(x)), (\exists x)(\mathbf{P}(x))$ はともに 0 変数の述語，すなわち命題になることに注意しておく。2 変数の述語に $\forall$ や $\exists$ を作用させれば 1 変数の述語になる。
例えば,

$$\mathbf{P}(x, y)$$

を 2 変数の述語とすれば

$$(\forall x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x,y)) = \bigwedge_{x\in\mathbf{D}} \mathbf{P}(x,y) \tag{3.14}$$

$$(\exists x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x,y)) = \bigvee_{x\in\mathbf{D}} \mathbf{P}(x,y) \tag{3.15}$$

は y についての 1 変数の述語になっている。

D が有限集合

$$\mathbf{D} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$$

の場合なら，このことはさらに判りやすくなる。実際,

$$\bigwedge_{x\in\mathbf{D}} \mathbf{P}(x,y) = \mathbf{P}(a_1,y) \wedge \mathbf{P}(a_2,y) \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n,y) \tag{3.16}$$

$$\bigvee_{x\in\mathbf{D}} \mathbf{P}(x,y) = \mathbf{P}(a_1,y) \vee \mathbf{P}(a_2,y) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_n,y) \tag{3.17}$$

で

$$\mathbf{P}(a_i,y) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

は y についての 1 変数の述語であり，それらの論理積，論理和も 1 変数の述語である。

同様に n 変数の述語に $\forall$ や $\exists$ を作用させると $(n-1)$ 変数の述語になる。n 変数の述語

$$\mathbf{P}(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \tag{3.18}$$

について x_i について $\forall$ や $\exists$ を作用させれば

$$(\forall x_i \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)) = \bigwedge_{x_i\in\mathbf{D}} \mathbf{P}(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \tag{3.19}$$

$$(\exists x_i \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)) = \bigvee_{x_i\in\mathbf{D}} \mathbf{P}(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \tag{3.20}$$

は $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n$ についての $n-1$ 変数の述語になっている。

$\forall$ を**全称記号** (universal quantifire)，$\exists$ を**存在記号** (existential quantifire) と呼び，両者をあわせて**限定記号**という。

3.1.4　束縛変数と自由変数

$$(\forall x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x,y)) = \bigwedge_{x\in\mathbf{D}} \mathbf{P}(x,y) \tag{3.21}$$

$$(\exists x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x,y)) = \bigvee_{x\in\mathbf{D}} \mathbf{P}(x,y) \tag{3.22}$$

あるいは $\mathbf{D}$ が有限集合

$$\mathbf{D} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$$

の場合の,

$$(\forall x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x,y)) = \mathbf{P}(a_1,y) \wedge \mathbf{P}(a_2,y) \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n,y) \tag{3.23}$$

$$(\exists x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x,y)) = \mathbf{P}(a_1,y) \vee \mathbf{P}(a_2,y) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_n,y) \tag{3.24}$$

の x は見かけ上の変数にすぎない。このような変数を**束縛変数** (bound variable) と呼ぶ。束縛変数に対象を代入することはできない。これとは逆に y のような本来の意味の変数を**自由変数** (free variable) という。自由変数には対象を代入することができる。

述語 $x < y$ は 2 変数の述語であったが，$(\exists x)(x < y)$ や $(\forall x)(x < y)$ は 1 変数の述語であり,

$$(\exists y)(\exists x)(x<y), (\exists y)(\forall x)(x<y), (\forall y)(\exists x)(x<y), (\forall y)(\forall x)(x<y)$$

は 0 変数の述語，すなわち命題である。

3.1.5　基本的な性質

$\forall$ や $\exists$ の基本的性質を調べていく。ここで簡単のため $\mathbf{D}$ を有限集合

$$\mathbf{D} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\} \tag{3.25}$$

としておく。

$b \in \mathbf{D}$ は $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ のどれかと一致するはずであるから $b = a_k$ としておく。

定義と定理 1.2 のド・モルガン則，交換則を使えば

$$\begin{aligned}
&(\forall x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow \mathbf{P}(a_k)\\
&= \neg\Big(\mathbf{P}(a_1) \wedge \mathbf{P}(a_2) \wedge \cdots \mathbf{P}(a_k) \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n)\Big) \vee \mathbf{P}(a_k)\\
&= \neg\mathbf{P}(a_1) \vee \neg\mathbf{P}(a_2) \vee \cdots \vee \neg\mathbf{P}(a_k) \cdots \vee \neg\mathbf{P}(a_n) \vee \mathbf{P}(a_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \neg\mathbf{P}(a_1) \vee \neg\mathbf{P}(a_2) \vee \cdots \vee \neg\mathbf{P}(a_{k-1}) \vee \neg\mathbf{P}(a_{k+1}) \cdots \vee \neg\mathbf{P}(a_n) \vee \neg\mathbf{P}(a_k) \vee \mathbf{P}(a_k)\\
&= \neg\mathbf{P}(a_1) \vee \neg\mathbf{P}(a_2) \vee \cdots \vee \neg\mathbf{P}(a_{k-1}) \vee \neg\mathbf{P}(a_{k+1}) \cdots \vee \neg\mathbf{P}(a_n) \vee T\\
&= T
\end{aligned} \tag{3.26}$$

結局，任意の対象 $b \in \mathbf{D}$ に対し

$$(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow \mathbf{P}(b) \tag{3.27}$$

は恒真論理式である。

次にすべての i について

$$A \Rightarrow \mathbf{P}(a_i)$$

が恒真論理式ならば,

$$\begin{aligned}
&A \Rightarrow (\forall x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x)) \\
&= \neg A \vee \Big(\mathbf{P}(a_1) \wedge \mathbf{P}(a_2) \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n)\Big) \\
&= (\neg A \vee \mathbf{P}(a_1)) \wedge (\neg A \vee \mathbf{P}(a_2)) \wedge \cdots \wedge (\neg A \vee \mathbf{P}(a_n)) \\
&= T \wedge \cdots \wedge T \\
&= T
\end{aligned} \tag{3.28}$$

よって任意の対象 $b \in \mathbf{D}$ に対し $A \Rightarrow \mathbf{P}(b)$ が恒真論理式ならば

$$\begin{aligned}
&A \Rightarrow (\forall x)(\mathbf{P}(x)) \\
&(\text{ただし } A \text{ は任意の命題})
\end{aligned} \tag{3.29}$$

も恒真論理式である。

また定義と定理 1.2 のド・モルガン則，交換則を使えば

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(a_k) \Rightarrow (\exists x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x)) \\
&= \neg\mathbf{P}(a_k) \vee \Big(\mathbf{P}(a_1) \vee \mathbf{P}(a_2) \vee \cdots \mathbf{P}(a_k) \cdots \vee \mathbf{P}(a_n)\Big) \\
&= \neg\mathbf{P}(a_k) \vee \mathbf{P}(a_1) \vee \mathbf{P}(a_2) \cdots \vee \mathbf{P}(a_k) \cdots \vee \mathbf{P}(a_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \neg\mathbf{P}(a_k) \vee \mathbf{P}(a_k) \vee \mathbf{P}(a_1) \vee \mathbf{P}(a_2) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_{k-1}) \vee \mathbf{P}(a_{k+1}) \cdots \vee \mathbf{P}(a_n) \\
&= T \vee \mathbf{P}(a_1) \vee \mathbf{P}(a_2) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_{k-1}) \vee \mathbf{P}(a_{k+1}) \cdots \vee \mathbf{P}(a_n) \\
&= T
\end{aligned} \tag{3.30}$$

よって任意の対象 $a \in \mathbf{D}$ に対し

$$\mathbf{P}(a) \Rightarrow (\exists x)(\mathbf{P}(x)) \tag{3.31}$$

は恒真論理式である。

同様にすべての k について

$$\mathbf{P}(a_k) \Rightarrow A$$

が恒真論理式ならば，定義と定理 1.2 のド・モルガン則，交換則を使えば

$$\begin{aligned}
&(\exists x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow A \\
&= \neg\Big(\mathbf{P}(a_1) \vee \mathbf{P}(a_2) \vee \mathbf{P}(a_3) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_n)\Big) \vee A \\
&= \Big(\neg\mathbf{P}(a_1) \wedge \neg\mathbf{P}(a_2) \wedge \neg\mathbf{P}(a_3) \wedge \cdots \wedge \neg\mathbf{P}(a_n)\Big) \vee A
\end{aligned}$$

$$= (\neg\mathbf{P}(a_1) \vee A) \wedge (\neg\mathbf{P}(a_2) \vee A) \wedge (\neg\mathbf{P}(a_3) \vee A) \wedge \cdots \wedge (\neg\mathbf{P}(a_n) \vee A) \tag{3.32}$$

$$= (\mathbf{P}(a_1) \Rightarrow A) \wedge (\mathbf{P}(a_2) \Rightarrow A) \wedge (\mathbf{P}(a_3) \Rightarrow A) \wedge \cdots \wedge (\mathbf{P}(a_n) \Rightarrow A) \tag{3.33}$$

よって, ある対象 $b \in \mathbf{D}$ に対し

$$\mathbf{P}(b) \Rightarrow A \tag{3.34}$$

が恒真論理式ならば

$$\begin{aligned}&(\exists x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow A\\&(\text{ただし } A \text{ は任意の命題})\end{aligned} \tag{3.35}$$

も恒真論理式である。

$\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ を $\mathbf{D}$ 上の述語とする。

$$\begin{aligned}&(\forall x)[\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)]\\&= (\mathbf{P}(a_1) \wedge \mathbf{Q}(a_1)) \wedge \cdots \wedge (\mathbf{P}(a_n) \wedge \mathbf{Q}(a_n))\\&= (\mathbf{P}(a_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n)) \wedge (\mathbf{Q}(a_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{Q}(a_n))\\&= (\forall x)(\mathbf{P}(x)) \wedge (\forall x)(\mathbf{Q}(x))\end{aligned} \tag{3.36}$$

従って論理式としての等式

$$(\forall x)[\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)] = (\forall x)(\mathbf{P}(x)) \wedge (\forall x)(\mathbf{Q}(x)) \tag{3.37}$$

が成り立つ。

次に

$$\begin{aligned}&(\exists x)[\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)]\\&= (\mathbf{P}(a_1) \vee \mathbf{Q}(a_1)) \vee \cdots \vee (\mathbf{P}(a_n) \vee \mathbf{Q}(a_n))\\&= (\mathbf{P}(a_1) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_n)) \vee (\mathbf{Q}(a_1) \vee \cdots \vee \mathbf{Q}(a_n))\\&= (\exists x)(\mathbf{P}(x)) \vee (\exists x)(\mathbf{Q}(x))\end{aligned} \tag{3.38}$$

従って論理式としての等式

$$(\exists x)[\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)] = (\exists x)(\mathbf{P}(x)) \vee (\exists x)(\mathbf{Q}(x)) \tag{3.39}$$

が成り立つ。

束縛変数は見かけ上の変数であることに注意すれば 1 変数の述語 $\mathbf{P}(x)$ について

$$(\forall x)(\mathbf{P}(x)) = (\mathbf{P}(a_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n)) = (\forall y)(\mathbf{P}(y)) \tag{3.40}$$

$$(\exists x)(\mathbf{P}(x)) = \mathbf{P}(a_1) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_n) = (\exists y)(\mathbf{P}(y)) \tag{3.41}$$

すなわち変数名を変更しても変わりない。

2 変数の述語 $\mathbf{P}(x, y)$ について, 定義と定理 1.2 のド・モルガン則，交換則を使えば

$$
\begin{aligned}
(\forall x)(\forall y)(\mathbf{P}(x,y)) &= (\forall x)\Big(\bigwedge_{k=1}^{k=n}(\mathbf{P}(x,a_k)\Big) \\
&= \bigwedge_{i=1}^{i=n}\Big(\bigwedge_{k=1}^{k=n}(\mathbf{P}(a_i,a_k)\Big) \\
&= \bigwedge_{k=1}^{k=n}\Big(\bigwedge_{i=1}^{i=n}(\mathbf{P}(a_i,a_k)\Big) \\
&= (\forall y)(\forall x)(\mathbf{P}(x,y))
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

$$
\begin{aligned}
(\exists x)(\exists y)(\mathbf{P}(x,y)) &= (\exists x)\Big(\bigvee_{k=1}^{k=n}(\mathbf{P}(x,a_k)\Big) \\
&= \bigvee_{i=1}^{i=n}\Big(\bigvee_{k=1}^{k=n}(\mathbf{P}(a_i,a_k)\Big) \\
&= \bigvee_{k=1}^{k=n}\Big(\bigvee_{i=1}^{i=n}(\mathbf{P}(a_i,a_k)\Big) \\
&= (\exists y)(\exists x)(\mathbf{P}(x,y))
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

すなわち, ひき続いて現れる同種の限定記号の順序を変えても変わりない。

定義と定理 1.2 のド・モルガン則，交換則を使えば

$$
\begin{aligned}
&\Big[(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow (\exists x)(\mathbf{P}(x))\Big] \\
&= \neg(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \vee (\exists x)(\mathbf{P}(x)) \\
&= \neg\Big(\bigwedge_{i=1}^{i=n}(\mathbf{P}(a_i)\Big) \vee \Big(\bigvee_{i=1}^{i=n}(\mathbf{P}(a_i)\Big)
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

さらに右辺は

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_{i=1}^{i=n}\Big(\neg\mathbf{P}(a_i)\Big) \vee \Big(\bigvee_{i=1}^{i=n}(\mathbf{P}(a_i)\Big) \\
&= \bigvee_{i=1}^{i=n}\Big(\neg\mathbf{P}(a_i) \vee \mathbf{P}(a_i)\Big) \\
&= \bigvee_{i=1}^{i=n}\Big(T\Big) \\
&= T
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

すなわち

$$
(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow (\exists x)(\mathbf{P}(x)) \tag{3.46}
$$

は恒真論理式である。

同様に定義と定理 1.2 のド・モルガン則，交換則を使えば

$$
(\exists y)(\forall x)(\mathbf{P}(x,y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\mathbf{P}(x,y)) = T
$$

すなわち

$$(\exists y)(\forall x)(\mathbf{P}(x, y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\mathbf{P}(x, y)) \tag{3.47}$$

は恒真論理式である。

同様に,$\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ を $\mathbf{D}$ 上の述語とすると,

$$(\forall x)[\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x)] \Rightarrow [(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow (\forall x)(\mathbf{Q}(x))] \tag{3.48}$$

と

$$(\exists x)[\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x)] \Rightarrow [(\exists x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow (\exists x)(\mathbf{Q}(x))] \tag{3.49}$$

は恒真論理式である。

以上は $\mathbf{D}$ が無限集合の場合も成り立つ。これを定理としてまとめておく。

定理 7

(i) $\mathbf{D}$ 上の述語 $\mathbf{P}$ について

(a) 任意の対象 $a \in \mathbf{D}$ に対し

$$(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow \mathbf{P}(a)$$

は恒真論理式である。

(b) 任意の対象 $a \in \mathbf{D}$ に対し $A \Rightarrow \mathbf{P}(a)$ が恒真論理式ならば

$$A \Rightarrow (\forall x)(\mathbf{P}(x))$$

(ただし A は任意の命題)

も恒真論理式である。

(c) 任意の対象 $a \in \mathbf{D}$ に対し

$$\mathbf{P}(a) \Rightarrow (\exists x)(\mathbf{P}(x))$$

は恒真論理式である。

(d) 任意の対象 $a \in \mathbf{D}$ に対し

$$\mathbf{P}(a) \Rightarrow A$$

が恒真式ならば

$$(\exists x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow A$$

(ただし A は任意の命題)

も恒真式である。

(ii) $\mathbf{D}$ 上の述語 $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ について

(a)

$$(\forall x)[\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)] \Leftrightarrow (\forall x)(\mathbf{P}(x)) \wedge (\forall x)(\mathbf{Q}(x))$$

は恒真論理式である。あるいは同じことであるが，論理式としての等式

$$(\forall x)[\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)] = (\forall x)(\mathbf{P}(x)) \wedge (\forall x)(\mathbf{Q}(x))$$

が成り立つ。

(b)

$$(\exists x)[\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)] \Leftrightarrow (\exists x)(\mathbf{P}(x)) \vee (\exists x)(\mathbf{Q}(x))$$

は恒真論理式である。あるいは同じことであるが，論理式としての等式

$$(\exists x)[\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)] = (\exists x)(\mathbf{P}(x)) \vee (\exists x)(\mathbf{Q}(x))$$

が成り立つ。

[1]

(iii)

(a) 束縛変数を含む述語 $\mathbf{Q}$ において，その束縛変数記号を $\mathbf{Q}$ に含まれない他の束縛変数記号でおきかえて得られる述語を $\mathbf{G}$ とすれば,

$$\mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{G}$$

は恒真論理式である。あるいは同じことであるが論理式の等号の意味で

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}$$

である。たとえば,

$$(\forall x)(\mathbf{P}(x)) = (\forall y)(\mathbf{P}(y))$$
$$(\exists x)(\mathbf{P}(x)) = (\exists y)(\mathbf{P}(y))$$

(b) 述語 $\mathbf{Q}$ において，ひき続いて現れる同種の限定記号の順序を変更して得られる述語を $\mathbf{G}$ とすれば,

$$\mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{G}$$

は恒真論理式である。あるいは同じことであるが論理式の等号の意味で

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}$$

である。
たとえば,

$$(\forall x)(\forall y)(\mathbf{P}(x, y)) = (\forall y)(\forall x)(\mathbf{P}(x, y)),$$
$$(\exists x)(\exists y)(\mathbf{P}(x, y)) = (\exists y)(\exists x)(\mathbf{P}(x, y))$$

(c)

$$(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow (\exists x)(\mathbf{P}(x))$$

は恒真論理式である。

(d)

$$(\exists y)(\forall x)(\mathbf{P}(x, y)) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\mathbf{P}(x, y))$$

は恒真論理式である。

(iv) $\mathbf{D}$ 上の述語 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ について，以下は恒真論理式である。

(a)

$$(\forall x)[\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x)] \Rightarrow [(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow (\forall x)(\mathbf{Q}(x))]$$

(b)

$$(\exists x)[\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathbf{Q}(x)] \Rightarrow [(\exists x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow (\exists x)(\mathbf{Q}(x))]$$

[2]

[1] 一般に，$(\exists x)[\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{Q}(x)] \neq (\exists x)(\mathbf{P}(x)) \wedge (\exists x)(\mathbf{Q}(x)), (\forall x)[\mathbf{P}(x) \vee \mathbf{Q}(x)] \neq (\forall x)(\mathbf{P}(x)) \vee (\forall x)(\mathbf{Q}(x))$ であることに注意!!

[2] (iii) の (c),(d), (iv) の (a),(b) の逆は成り立しないことに注意!!

3.1.6　冠頭標準形

ド・モルガンなどを用いれば，限定記号 $\forall$　$\exists$ が他の論理記号より，左側にあるように変形できる。これを冠頭標準形 *prenex normal form* という。この節では冠頭標準形の導出法について述べる。

ここで簡単のため $\mathbf{D}$ を有限集合

$$\mathbf{D} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$$

としておく。以下の結果は $\mathbf{D}$ が無限集合でも成り立つ。

$\neg$ の右側への移動

定理 8.1

定義と定理 1.2 のド・モルガン則によれば，

$$\begin{aligned}\neg(\forall x)(\mathbf{P}(x)) &= \neg(\mathbf{P}(a_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n)) \\ &= \neg\mathbf{P}(a_1) \vee \neg\mathbf{P}(a_1) \cdots \vee \neg\mathbf{P}(a_n) \\ &= (\exists x)(\neg\mathbf{P}(x)) \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}\neg(\exists x)(\mathbf{P}(x)) &= \neg(\mathbf{P}(a_1) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_n)) \\ &= \neg\mathbf{P}(a_1) \wedge \neg\mathbf{P}(a_1) \cdots \wedge \neg\mathbf{P}(a_n) \\ &= (\forall x)(\neg\mathbf{P}(x)) \end{aligned} \tag{3.51}$$

を得る。

限定記号 $\forall, \exists$ の左側への移動

$\mathbf{P}(x)$ と x を含まない $\mathcal{B}$ について定義と定理 1.2 によれば，定理 8.2 が成り立つ。

定理 8.2

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \wedge (\forall x)(\mathbf{P}(x)) &= \mathcal{B} \wedge (\mathbf{P}(a_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\mathcal{B} \wedge \mathbf{P}(a_1)) \wedge \cdots \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\forall x)(\mathcal{B} \wedge \mathbf{P}(x)) \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \vee (\forall x)(\mathbf{P}(x)) &= \mathcal{B} \vee (\mathbf{P}(a_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(a_1)) \wedge \cdots \wedge (\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\forall x)(\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(x)) \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \wedge (\exists x)(\mathbf{P}(x)) &= \mathcal{B} \wedge (\mathbf{P}(a_1) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\mathcal{B} \wedge \mathbf{P}(a_1)) \vee \cdots \vee (\mathcal{B} \wedge \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\exists x)(\mathcal{B} \wedge \mathbf{P}(x)) \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \vee (\exists x)(\mathbf{P}(x)) &= \mathcal{B} \vee (\mathbf{P}(a_1) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(a_1)) \vee \cdots \vee (\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\exists x)(\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(x))\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \Rightarrow (\forall x)(\mathbf{P}(x)) &= \neg\mathcal{B} \vee (\forall x)(\mathbf{P}(x)) \\ &= \neg\mathcal{B} \vee (\mathbf{P}(a_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\neg\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(a_1)) \wedge \cdots \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\forall x)(\neg\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(x)) \\ &= (\forall x)(\mathcal{B} \Rightarrow \mathbf{P}(x))\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \Rightarrow (\exists x)(\mathbf{P}(x)) &= \neg\mathcal{B} \vee (\exists x)(\mathbf{P}(x)) \\ &= \neg\mathcal{B} \vee (\mathbf{P}(a_1) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\neg\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(a_1)) \vee \cdots \vee (\neg\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(a_n)) \\ &= (\exists x)(\neg\mathcal{B} \vee \mathbf{P}(x)) \\ &= (\exists x)(\mathcal{B} \Rightarrow \mathbf{P}(x))\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow \mathcal{B} &= \neg(\forall x)(\mathbf{P}(x)) \vee \mathcal{B} \\ &= \neg(\mathbf{P}(a_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{P}(a_n)) \vee \mathcal{B} \\ &= \neg\mathbf{P}(a_1) \vee \neg\mathbf{P}(a_1) \cdots \vee \neg\mathbf{P}(a_n) \vee \mathcal{B} \\ &= (\neg\mathbf{P}(a_1) \vee \mathcal{B}) \vee (\neg\mathbf{P}(a_1) \vee \mathcal{B}) \cdots \vee (\neg\mathbf{P}(a_n) \vee \mathcal{B}) \\ &= (\exists x)(\neg\mathbf{P}(x) \vee \mathcal{B}) \\ &= (\exists x)(\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathcal{B})\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}(\exists x)(\mathbf{P}(x)) \Rightarrow \mathcal{B} &= \neg(\exists x)(\mathbf{P}(x)) \vee \mathcal{B} \\ &= \neg(\mathbf{P}(a_1) \vee \cdots \vee \mathbf{P}(a_n)) \vee \mathcal{B} \\ &= (\neg\mathbf{P}(a_1) \wedge \neg\mathbf{P}(a_1) \cdots \wedge \neg\mathbf{P}(a_n)) \vee \mathcal{B} \\ &= (\neg\mathbf{P}(a_1) \vee \mathcal{B}) \wedge (\neg\mathbf{P}(a_1) \wedge \mathcal{B}) \cdots \wedge (\neg\mathbf{P}(a_n) \vee \mathcal{B}) \\ &= (\forall x)(\neg\mathbf{P}(x) \vee \mathcal{B}) \\ &= (\forall x)(\mathbf{P}(x) \Rightarrow \mathcal{B})\end{aligned} \tag{3.59}$$

冠頭標準形の導出法

定理 7 と 8.1, 8.2 により以下の手順で冠頭標準形を導出することができる。

1. 同じ変数名で自由変数と束縛変数が混在する場合は変数名を変更する。例えば

$$(\exists x)(\mathbf{P}(x, y)) \wedge (\forall y)(\mathbf{Q}(y, z)) = (\exists x)(\mathbf{P}(x, y)) \wedge (\forall w)(\mathbf{Q}(w, z))$$

2. $\neg$ の右側への移動
   定理 8.1(ド・モルガン則) により

$$\neg\exists(\cdots) = \forall\neg(\cdots)$$

$$\neg\forall(\cdots) = \exists\neg(\cdots)$$

   の形の変形を行う。

3. 限定記号 $\forall$,　$\exists$ の左側への移動
   定理 8.2 により

$$(\cdots\exists\cdots) = \exists(\cdots)$$

$$(\cdots\forall\cdots) = \forall(\cdots)$$

   の形の変形を繰り返し行う。

さらに以上の手順と主 $\vee$ 標準形 (主 $\wedge$ 標準形) への変換アルゴリズムを併用することもできる。

第4章　述語の公理系

4.1　述語論理の公理系

命題論理では真理値の集合 $\mathbf{V} = \{T, F\}$ 上での命題変数による論理演算を扱うだけであったので記号の表現が簡潔であったが，述語論理は対象領域 $\mathbf{D}$ 上の述語をも扱うためその分複雑になる。

$\mathbf{D}$ はそれぞれの数学的理論が固定されて決まる。例えば，整数論なら $\mathbf{D} = \mathbf{Z}$ であるし，複素数の性質を扱う理論なら $\mathbf{D} = \mathbf{C}$ である。さらに述語は $x > y$ といった $\mathbf{D}$ の要素について単純な関係だけではなく，$sin(x) = y$，$cos(sin(x)) = y$ などのように $\mathbf{D}$ の要素に $\mathbf{D}$ の上で定義される関数を作用させた，対象についての記述も含む。

このため先ず $\mathbf{D}$ の上の「項」という概念が必要になる。項には以下の記号が用いられる。

1. 対象定数記号　特定の対象を表す記号。$c_1, c_2, \cdots$ または 0 変数の関数を表す $\phi_1^0, \phi_2^0, \cdots$ などを用いる。

2. 対象変数記号　$\mathbf{D}$ 上の変数を表す記号。$x_1, x_2, \cdots$ などを用いる。

3. 関数記号　$\mathbf{D}$ から $\mathbf{D}$ への関数を表す記号。$\phi_1, \phi_2, \cdots$ などを用いる。

これらの記号を用いて項は「再帰的」に定義される。

1. 対象定数記号は項である。

2. 対象変数記号は項である。

3. ϕ が n 変数関数記号で $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が項ならば,

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

   は項である。

4.1.1　述語論理の記号

述語論理の記号は命題論理のそれを含み限定記号 $\forall, \exists$ などが使用される。以下にそれを挙げる。

1. 論理記号

   (a) $\neg$ 「... でない」
   (b) $\vee$「... または...」と $\wedge$「... かつ...」
   (c) $\Rightarrow$「... ならば...」
   (d) $\forall$ 「すべての... について...」「任意の... について...」
   (e) $\exists$ 「ある... が存在して...」

2. 補助的な記号

(a) 括弧 ( ), { }

(b) メタ記号 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, etc.$

4.1.2　論理式

命題論理と同様に論理式が以下のように再帰的に定義される。限定記号で束縛されていない対象変数記号を自由変数記号という。

1. $\mathbf{P}$ が n 変数述語記号で $s_1, s_2. \cdots, s_n$ が項なら $\mathbf{P}(s_1, s_2. \cdots, s_n)$ は論理式
2. $\mathcal{A}$ が**論理式**ならば、$\neg\mathcal{A}$ は**論理式**である。
3. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が**論理式**ならば、
$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$$
は、いずれも**論理式**である。
4. $\mathcal{C}(a)$ が対象変数記号 a を含む論理式で，a が自由変数記号のとき，x が $\mathcal{C}(a)$ の中に現れない対象変数記号ならば
$$(\forall x)(\mathcal{C}(x)) \quad , (\exists x)(\mathcal{C}(x))$$
は、いずれも**論理式**である。

上の定義では T と F 以外具体的な論理式は出てこない。$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ は不特定な論理式を表すメタ記号であって，具体的な論理式ではない。しかし，命題論理の論理式と同様にこれらの規則で無数の論理式を作りだすことができる。

4.1.3　公理

命題論理と同様に述語論理の論理式の全体を $\mathbf{L_g}$ と書くことにしよう。対象領域 $\mathbf{D}$ が無限集合のときは，一般には命題論理の論理式と異なり，有限回の操作ではその真理値を決定できないことに注意する。以下にこの教材で扱う公理系を示す。$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ は任意の $\mathbf{L_g}$ の要素とする。**公理系**$\beta \subset \mathbf{L_g}$ として，次の (1) ～ (17) をとる。

1. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$
2. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow [(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})]$
3. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$
4. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}$
5. $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow \{(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow [(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}]\}$
6. $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
7. $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
8. $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \{(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow [\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})]\}$

9. $[\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})] \Rightarrow \mathcal{B}$
10. $[(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow] F \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$
11. $(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}) \Rightarrow F$
12. $[(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B}] \Rightarrow [\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})]$
13. $\mathcal{A} \Rightarrow T$
14. $F \Rightarrow \mathcal{A}$
15. $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$
16. $(\forall x)(\mathcal{A}(x)) \Rightarrow \mathcal{A}(s)$ (ただし s は項)
17. $\mathcal{A}(s) \Rightarrow (\exists x)(\mathcal{A}(x))$ (ただし s は項)

4.1.4 推論規則と証明

命題論理での**推論規則**は，次の**三段論法** (modus ponens) のみであったが述語論理ではこれに限定記号 $\forall$, $\exists$ の作用の規則が加わる。（全称化と特称化）命題論理のときと同様，横線の上の論理式から下の**論理式**が導かれることを表わす。

1. 三段論法
$$\frac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$
2. 全称化
$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}(a)}{\mathcal{A} \Rightarrow (\forall a)(\mathcal{B}(a))}$$
ただし a は自由変数記号で $\mathcal{A}$ には現れないものとする。
3. 特称化
$$\frac{\mathcal{A}(a) \Rightarrow \mathcal{B}}{(\exists a)(\mathcal{A}(a)) \Rightarrow \mathcal{B}}$$
ただし a は自由変数記号で $\mathcal{B}$ には現れないものとする。

4.1.5 証明可能性

命題論理と同様に **証明可能性**を定義する。すなわち，$\mathbf{L_g}$ の要素である**論理式**のうち，**証明可能な論理式** (provable formula) を次のように定める:

1. 公理系の各公理の形の**論理式**は**証明可能**である。
2. 論理式 $\mathcal{A}$ と論理式 $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ が**証明可能**ならば，(推論規則によって，) 論理式 $\mathcal{B}$ は**証明可能**である。
3. 論理式 $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}(a)$ が**証明可能**ならば，(推論規則「全称化」によって，) 論理式 $\mathcal{A} \Rightarrow (\forall a)(\mathcal{B}(a))$ も**証明可能**である。ただし a は自由変数記号で $\mathcal{A}$ には現れないものとする。
4. 論理式 $\mathcal{A}(a) \Rightarrow \mathcal{B}$ が**証明可能**ならば，(推論規則「特称化」によって，) 論理式 $(\exists a)(\mathcal{A}(a)) \Rightarrow \mathcal{B}$ は**証明可能**である。ただし a は自由変数記号で $\mathcal{B}$ には現れないものとする。

証明可能な**論理式**の**列**を**「証明」**という。**「証明可能性」**の定義に従えば

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$$

が**「証明」**のとき。各 $\mathcal{A}_k$ は

1. **公理系**の各公理の形の**論理式**である。
2. **論理式** $\mathcal{A}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{A}_i$ と $\mathcal{A}_j$ $(i, j < k)$ があり，$\mathcal{A}_j$ は $\mathcal{A}_i \Rightarrow \mathcal{A}_k$ の形をしている。
3. **論理式** $\mathcal{A}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{A}_j$ $(j < k)$ があり，$\mathcal{A}_j$ は
$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}(a) \tag{4.1}$$
であり，$\mathcal{A}_k$ は
$$\mathcal{A} \Rightarrow (\forall a)(\mathcal{B}(a)) \tag{4.2}$$
の形をしている。 ただし a は自由変数記号で $\mathcal{A}$ には現れないものとする。
4. **論理式** $\mathcal{A}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{A}_j$ $(j < k)$ があり，$\mathcal{A}_j$ は
$$\mathcal{A}(a) \Rightarrow \mathcal{B} \tag{4.3}$$
であり，$\mathcal{A}_k$ は
$$(\exists a)(\mathcal{A}(a)) \Rightarrow \mathcal{B} \tag{4.4}$$
の形をしている。 ただし a は自由変数記号で $\mathcal{B}$ には現れないものとする。

4.1.6　推論法則

命題論理と同様に**「証明」**の中で推論規則と公理を何回か適用する共通した手順を**「推論法則」**と呼ぶ。（これ自身は公理系を定義するのに必須ではないが，それを操作する上で便利な手続きをまとめたもの。）以下に推論規則の例を述べる。（総て命題論理と同じ形の規則である。）

［例］

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}} \qquad \textbf{(推論法則:添加)}$$

$\mathcal{A}$ が証明可能な論理式ならば $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ も証明可能な論理式であることを表す。（上の「証明」の例に現れている。）

$$\frac{\mathcal{A}, \mathcal{B}}{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}} \qquad \textbf{(推論法則:論理積)}$$

$$\frac{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}{\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}} \qquad \textbf{(推論法則:交換)}$$

$$\frac{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}{\mathcal{B} \vee \mathcal{A}} \qquad \textbf{(推論法則:交換)}$$

$$\frac{\mathcal{A}}{\neg\neg A}, \quad \frac{\neg\neg A}{A} \textbf{(推論法則:２重否定)}$$

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}}{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}} \textbf{(推論法則:推移)}$$

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}} \quad (\textbf{推論法則:復推移})$$

上述の体系を H と呼ぶことにしよう。($H =$ 公理系$\beta +$「推論規則」) $\mathbf{L_g}$ の論理式 $\mathcal{A}$ が**証明可能**であるとは，H において，公理系 β から $\mathcal{A}$ が**推論規則**によって導けることであるから，これを

$$\vdash_H \mathcal{A}$$

と書く。**推論規則**

$$\frac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$$

はこの表記法を用いると，

$$\frac{\vdash_H \mathcal{A} \quad \vdash_H \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\vdash_H \mathcal{B}}$$

と書くべきである。しかし，どの系で**証明可能**なのか明らかな場合は $\vdash_H$ は省略することにする。

4.1.7 演繹定理

定理 10(演繹定理 1) 既述の体系 H についてその公理系 β に論理式

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$$

を追加してできる新たな系で論理式 $\mathcal{B}$ が証明可能であるとき，このことを

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \vdash_H \mathcal{B} \tag{4.5}$$

で表す。このとき：

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1} \vdash_H (\forall a_1)(\forall a_2) \cdots (\forall a_l)\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B} \tag{4.6}$$

が成り立つ。$a_1, a_2 \cdots a_l$ は $\mathcal{A}_n$ に現れる総ての自由変数記号とする。□

演繹定理の証明 体系 H についてその公理系に論理式

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$$

を追加してできる新たな系を H^1 で表し，体系 H についてその公理系に論理式

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1}$$

を追加してできる系を H^2 で表す。

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \vdash_H \mathcal{B} \tag{4.7}$$

は

$$\vdash_{H^1} \mathcal{B} \tag{4.8}$$

であることを表している。示すべきことは

$$\vdash_{H^2} (\forall a_1)(\forall a_2) \cdots (\forall a_l)\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B} \tag{4.9}$$

である。$a_1, a_2 \cdots a_l$ は $\mathcal{A}_n$ に現れる総ての自由変数である。

$$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \cdots, \mathcal{B}_{n-1}, \mathcal{B}_n (= \mathcal{B}) \tag{4.10}$$

が H^1 での「証明」とするとき，定義より各 $\mathcal{B}_k$ は次のいずれかである。

(1) $\mathcal{B}_k$ は $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ のうち 1 つである。

(2) $\mathcal{B}_k$ は H の各公理の形の論理式である。

(3) **論理式** $\mathcal{B}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{B}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(i, j < k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は $\mathcal{B}_i \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の形をしている。

(4) **論理式** $\mathcal{B}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{B}_j$ $(j < k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は

$$\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}(b) \tag{4.11}$$

であり，$\mathcal{B}_k$ は

$$\mathcal{C} \Rightarrow (\forall b)(\mathcal{D}(b)) \tag{4.12}$$

の形をしている。 ただし b は自由変数記号で $\mathcal{C}$ には現れないものとする。

(5) **論理式** $\mathcal{B}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{B}_j$ $(j < k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は

$$\mathcal{C}(b) \Rightarrow \mathcal{D} \tag{4.13}$$

であり，$\mathcal{B}_k$ は

$$(\exists b)(\mathcal{C}(b)) \Rightarrow \mathcal{D} \tag{4.14}$$

の形をしている。 ただし b は自由変数記号で $\mathcal{D}$ には現れないものとする。

ここで,

$$(\forall a_1)(\forall a_2)\cdots(\forall a_l)\mathcal{A}_n \tag{4.15}$$

を簡単に

$$\bar{\mathcal{A}}_n \tag{4.16}$$

で表す。このとき,

$$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_1, \bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_2, \cdots, \bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_{n-1}, \bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_n \tag{4.17}$$

は H^2 での $\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ を含む「証明」になる。
実際,

(1) $\mathcal{B}_k$ が $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1}$ のうち 1 つであれば，$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1}$ は H^2 では公理であるから証明可能な論理式ゆえ推論規則「添加」

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C}} \qquad \text{(添加)}$$

により，$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ は H^2 で証明可能な論理式になる。$\mathcal{B}_k$ が $\mathcal{A}_n$ 自身ならば，公理 (16) を l 回適用して

$$\begin{aligned}
&(\forall a_1)(\forall a_2)\cdots(\forall a_l)\mathcal{A}_n \Rightarrow (\forall a_2)\cdots(\forall a_l)\mathcal{A}_n(a_1, a_2, \cdots, a_l)\\
&(\forall a_2)\cdots(\forall a_l)\mathcal{A}_n \Rightarrow (\forall a_3)\cdots(\forall a_l)\mathcal{A}_n(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_l)\\
\\
&(\forall a_3)\cdots(\forall a_l)\mathcal{A}_n \Rightarrow (\forall a_4)\cdots(\forall a_l)\mathcal{A}_n(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_l)\\
&\cdots\\
&(\forall a_l)\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}_n(a_1, a_2, \cdots, a_l)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

により,

$$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{A}_n \tag{4.19}$$

は H^2 で証明可能な論理式である。

(2) $\mathcal{B}_k$ が H の各公理の形の論理式であるとき，同様に「添加」により，$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ は H^2 で証明可能な論理式である。

(3) 論理式 $\mathcal{B}_k$ の前に論理式 $\mathcal{B}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(i, j < k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は $\mathcal{B}_i \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の形をしているときは，$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の前に，$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_i$ と $\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow (\mathcal{B}_i \Rightarrow \mathcal{B}_k)$ とがあることになる。これに「複推移」

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}} \quad \text{(複推移)}$$

を適用すると $\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ が証明可能であることが示される。

(4) **論理式** $\mathcal{B}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{B}_j$ $(j < k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は]

$$\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}(b) \tag{4.20}$$

であり，$\mathcal{B}_k$ は

$$\mathcal{C} \Rightarrow (\forall b)(\mathcal{D}(b)) \tag{4.21}$$

の形をしている場合。ただし b は自由変数記号で $\mathcal{C}$ には現れないものとする。この場合，$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の前に，$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}(b))$ があり，$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ は

$$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{C} \Rightarrow (\forall b)(\mathcal{D}(b)) \tag{4.22}$$

の形をしている。ここで $\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}(b))$ に全称化の推論規則

$$\frac{\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F}(c)}{\mathcal{E} \Rightarrow (\forall c)(\mathcal{F}(c))}$$

を適用して

$$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow (\forall b)(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}(b)) \tag{4.23}$$

が証明可能である。また公理 (16) から

$$(\forall b)(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}(b)) \quad \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}(b)) \tag{4.24}$$

が証明可能である。　全称化の推論規則によれば

$$(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}(b)) \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow (\forall b)(\mathcal{D}(b))) \tag{4.25}$$

が証明可能である。以上を連鎖させれば，

$$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k \tag{4.26}$$

が証明可能であることがわかる。
最後に，

(5) **論理式** $\mathcal{B}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{B}_j$ $(j < k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は

$$\mathcal{C}(b) \Rightarrow \mathcal{D} \tag{4.27}$$

であり，$\mathcal{B}_k$ は

$$(\exists b)(\mathcal{C}(b)) \Rightarrow \mathcal{D} \tag{4.28}$$

の形をしている場合を考えよう。 ただし b は自由変数記号で $\mathcal{D}$ には現れないものとする。
この場合，$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の前に，$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow (\mathcal{C}(b) \Rightarrow \mathcal{D})$ があり，$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ は

$$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow ((\exists b)(\mathcal{C}(b)) \Rightarrow \mathcal{D}) \tag{4.29}$$

の形である。

先ず，公理 (17) によれば

$$(\mathcal{C}(b) \Rightarrow \mathcal{D}) \Rightarrow ((\exists b)(\mathcal{C}(b)) \Rightarrow \mathcal{D}) \tag{4.30}$$

が証明可能である。これと既に証明可能なことが分かっている $\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow (\mathcal{C}(b) \Rightarrow \mathcal{D})$ を連鎖させれば,

$$\bar{\mathcal{A}}_n \Rightarrow ((\exists b)(\mathcal{C}(b)) \Rightarrow \mathcal{D}) \tag{4.31}$$

が証明可能なことが分かる。□

定理 10 の系 (演繹定理 2)

$a_1, a_2 \cdots a_l$ は $\mathcal{A}_n$ に現れる総ての自由変数記号とする。

特に $a_1, a_2 \cdots a_l$ についての全称化を行わずに

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \vdash_H \mathcal{B} \tag{4.32}$$

ならば：

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1} \vdash_H \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B} \tag{4.33}$$

が成り立つ。□

系の証明

定理 (10) と同様に体系 H についてその公理系に論理式

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$$

を追加してできる新たな系を H^1 で表し，体系 H についてその公理系に論理式

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1}$$

を追加してできる系を H^2 で表す。

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \vdash_H \mathcal{B} \tag{4.34}$$

は

$$\vdash_{H^1} \mathcal{B} \tag{4.35}$$

であることを表している。示すべきことは

$$\vdash_{H^2} \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B} \tag{4.36}$$

である。

$$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \cdots, \mathcal{B}_{n-1}, \mathcal{B}_n (= \mathcal{B})$$

が H^1 での「証明」とするとき，定義と $a_1, a_2 \cdots a_l$ についての制限から各 $\mathcal{B}_k$ は次のいずれかである。

(1) $\mathcal{B}_k$ は $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ のうち 1 つである。

(2) $\mathcal{B}_k$ は H の各公理の形の論理式である。

(3) **論理式** $\mathcal{B}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{B}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(i,j<k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は $\mathcal{B}_i \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の形をしている。

(4) **論理式** $\mathcal{B}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{B}_j$ $(j<k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は

$$\mathcal{C}(b) \Rightarrow \mathcal{D} \tag{4.37}$$

であり，$\mathcal{B}_k$ は

$$(\exists b)(\mathcal{C}(b)) \Rightarrow \mathcal{D} \tag{4.38}$$

の形をしている。 ただし b は自由変数記号で $\mathcal{D}$ には現れないものとする。

このとき，

$$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_1, \mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{B}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_{n-1}, \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_n \tag{4.39}$$

は H^2 での $\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ を含む「証明」になる。
実際，

(1) $\mathcal{B}_k$ が $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1}$ のうち１つであれば，
$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1}$ は H^2 では公理であるから証明可能な論理式ゆえ推論規則「添加」

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C}} \qquad (\text{添加})$$

により，$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ は H^2 で証明可能な論理式になる。$\mathcal{B}_k$ が $\mathcal{A}_n$ 自身ならば，公理 (1) により，

$$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{A}_n$$

は H^2 で証明可能な論理式である。

(2) $\mathcal{B}_k$ が H の各公理の形の論理式であるとき，同様に「添加」により，$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ は H^2 で証明可能な論理式である。

(3) 論理式 $\mathcal{B}_k$ の前に論理式 $\mathcal{B}_i$ と $\mathcal{B}_j$ $(i,j<k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は $\mathcal{B}_i \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の形をしているときは，$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の前に，$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_i$ と $\mathcal{A}_n \Rightarrow (\mathcal{B}_i \Rightarrow \mathcal{B}_k)$ とがあることになる。これに「複推移」

$$\frac{\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}} \qquad (\text{複推移})$$

を適用すると $\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ が証明可能であることが示される。

最後に，

(4) **論理式** $\mathcal{B}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{B}_j$ $(j<k)$ があり，$\mathcal{B}_j$ は

$$\mathcal{C}(b) \Rightarrow \mathcal{D} \tag{4.40}$$

であり，$\mathcal{B}_k$ は

$$(\exists b)(\mathcal{C}(b)) \Rightarrow \mathcal{D} \tag{4.41}$$

の形をしている場合を考えよう。 ただし b は自由変数記号で $\mathcal{D}$ には現れないものとする。
この場合，$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ の前に，$\mathcal{A}_n \Rightarrow (\mathcal{C}(b) \Rightarrow \mathcal{D})$ があり，$\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}_k$ は

$$\mathcal{A}_n \Rightarrow ((\exists b)(\mathcal{C}(b)) \Rightarrow \mathcal{D}) \tag{4.42}$$

の形である。
先ず，公理 (17) によれば

$$(\mathcal{C}(b) \Rightarrow \mathcal{D}) \Rightarrow ((\exists b)(\mathcal{C}(b)) \Rightarrow \mathcal{D}) \tag{4.43}$$

が証明可能である。これと既に証明可能なことが分かっている $\mathcal{A}_n \Rightarrow (\mathcal{C}(b) \Rightarrow \mathcal{D})$ を連鎖させれば，

$$\mathcal{A}_n \Rightarrow ((\exists b)(\mathcal{C}(b)) \Rightarrow \mathcal{D}) \tag{4.44}$$

が証明可能なことが分かる。□

4.1.8　解釈

述語論理は対象領域 $\mathbf{D}$ が具体的に与えられて初めて具体的な意味をもつ。述語の真理値も決定される。

前節で定義された項と論理式は，特定の対象を表す記号である対象定数記号，$\mathbf{D}$ 上の変数を表す対象変数記号，$\mathbf{D}$ から $\mathbf{D}$ への関数を表す関数記号および $\mathbf{D}$ 上の述語を表す述語記号から作られた記号列に過ぎない。
これらの記号列が 3.1 節で与えた対象領域上の特定の述語と，述語の論理演算として真理値を確定するためには，以下の対応を与える必要がある。

1. 対象変数記号と $\mathbf{D}$ の要素との対応
   これを
   $$\alpha : x \in \text{公理系の対象変数記号全体の集合} \mapsto \alpha(x) \in \mathbf{D} \tag{4.45}$$
   で表す。

2. 対象定数記号と $\mathbf{D}$ の要素との対応
   対象定数記号は 0 関数記号とみなし，関数記号と $\mathbf{D}$ 上の関数との対応の特別な場合に含める。

3. 関数記号と $\mathbf{D}$ 上の関数との対応
   $\mathcal{F}^n$ で n 変数の関数記号の全体を，
   $$\mathcal{F}(\mathbf{D}^n, \mathbf{D}) = \{f | f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{D}^n \mapsto \phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{D}\} \tag{4.46}$$
   を $\mathbf{D}$ 上の関数全体の集合とし，これらの間の対応を
   $$\begin{aligned} &\phi^n \in \mathcal{F}^n \mapsto \rho(\phi^n) \in \mathcal{F}(\mathbf{D}^n, \mathbf{D}) \\ &\rho(\phi^n) : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{D} \mapsto \rho(\phi^n)(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned} \tag{4.47}$$
   で表す。

4. 述語記号と $\mathbf{D}$ 上の述語との対応
   真理値の集合を $\mathbf{V} = \{T, F\}$，$\mathcal{P}^n$ を n 変数の述語記号の全体の集合として，
   $$\mathcal{P}(\mathbf{D}^n; \mathbf{V}) = \{P | P : (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{D}^n \mapsto P(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{V}\} \tag{4.48}$$
   を $\mathbf{D}$ 上の n 変数の述語全体の集合とする。
   これらの間の対応を
   $$\begin{aligned} &\mathbf{P}^n \in \mathcal{P}^n \mapsto \pi(\mathbf{P}^n) \in \mathcal{P}(\mathbf{D}^n; \mathbf{V}) \\ &\quad \pi(\mathbf{P}^n) : (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{D} \mapsto \pi(\mathbf{P}^n)(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{V} \end{aligned} \tag{4.49}$$
   で表す。

$$\mathcal{M} = (\mathbf{D}, \rho, \pi) \tag{4.50}$$

を解釈という。

解釈 $\mathcal{M} = (\mathbf{D}, \rho, \pi)$ と対象変数記号と $\mathbf{D}$ の要素との対応 α を用いて，項に $\mathbf{D}$ の要素を対応させ，論理式にはその真理値を対応させる作用 $\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\cdot]$ を以下のように帰納的に定める。

1. 項の値

(a) 対象変数記号 x_i に対しては

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[x_i]=\alpha(x_i) \tag{4.51}$$

(b) 対象定数記号 c_i に対しては，これは 0 変数の関数であり，

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[c_i]=\rho(c_i) \tag{4.52}$$

(c) $s_1,s_2,\cdots,s_n$ が項で, それぞれ,$\mathbf{D},\alpha$ での値が

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[s_i], i=1,\cdots,n \tag{4.53}$$

のとき,n 変数関数 ϕ^n については

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\phi^n(s_1,s_2,\cdots,s_n)]=\rho(\phi^n)(\tau(\mathcal{M},\alpha)[s_1],\tau(\mathcal{M},\alpha)[s_2],\cdots,\tau(\mathcal{M},\alpha)[s_n]) \tag{4.54}$$

2. 論理式の値

(a) $\mathbf{P}^n$ が n 変数の述語変数記号で,$s_1,s_2,\cdots,s_n$ が項のとき,

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathbf{P}^n(s_1,s_2,\cdots,s_n)]=\pi(\mathbf{P}^n)(\tau(\mathcal{M},\alpha)[s_1],\tau(\mathcal{M},\alpha)[s_2],\cdots,\tau(\mathcal{M},\alpha)[s_n]) \tag{4.55}$$

(b) 特に 0 変数の述語記号すなわち命題記号 $\mathbf{P}^0$ には $\mathbf{V}=\{T,F\}$ の要素である真理値を

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathbf{P}^0]=\pi(\mathbf{P}^0)\in\mathbf{V} \tag{4.56}$$

で対応させる。

(c) $\mathcal{A}$ が**論理式**ならば、

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\neg\mathcal{A}]=\neg\tau[\mathcal{M},\alpha](\mathcal{A}) \tag{4.57}$$

(d) $\mathcal{A},\mathcal{B}$ が**論理式**ならば、

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}]=\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{A}]\wedge\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{B}] \tag{4.58}$$

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})=\tau(\mathcal{M},\alpha)(\mathcal{A})\vee\tau(\mathcal{M},\alpha)(\mathcal{B}) \tag{4.59}$$

(e) $\mathcal{C}(a)$ が変数記号 a を論理式で，a が自由変数記号のとき，x を $\mathcal{C}(a)$ の中に現れない対象変数記号ならば

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[(\forall x)(\mathcal{C}(x))]=\bigwedge_{b\in\mathbf{D}}\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b) \tag{4.60}$$

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[(\exists x)(\mathcal{C}(x))]=\bigvee_{b\in\mathbf{D}}\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b) \tag{4.61}$$

例えば $\mathbf{D}$ が有限集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ とし，$\mathbf{C}(x,y,z)$ が 3 変数の述語とする。

対象変数記号 x, 対象定数記号 c に対して,

$$\begin{aligned}\tau(\mathcal{M},\alpha)[x] &= \alpha(x) = a_1\\ \tau(\mathcal{M},\alpha)[c] &= \rho(c) = a_3\end{aligned} \tag{4.62}$$

とすると

$$\begin{aligned}&\tau(\mathcal{M},\alpha)[(\forall z)(\mathcal{C}(x,c,z))] = \bigwedge_{b\in\mathbf{D}} \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}(x,c,b))]\\ &= \bigwedge_{b\in\mathbf{D}} \pi(\mathcal{C})(\tau(\mathcal{M},\alpha)[x],\tau(\mathcal{M},\alpha)[c],b)\\ &= \pi(\mathcal{C})(a_1,a_3,a_1)\wedge\pi(\mathcal{C})(a_1,a_3,a_2)\wedge\pi(\mathcal{C})(a_1,a_3,a_3)\wedge\cdots\wedge\pi(\mathcal{C})(a_1,a_3,a_n)\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}&\tau(\mathcal{M},\alpha)[(\exists z)(\mathcal{C}(x,c,z))] = \bigvee_{b\in\mathbf{D}} \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}(x,c,b))]\\ &= \bigvee_{b\in\mathbf{D}} \pi(\mathcal{C})(\tau(\mathcal{M},\alpha)[x],\tau(\mathcal{M},\alpha)[c],b)\\ &= \pi(\mathcal{C})(a_1,a_3,a_1)\vee\pi(\mathcal{C})(a_1,a_3,a_2)\vee\pi(\mathcal{C})(a_1,a_3,a_3)\vee\cdots\vee\pi(\mathcal{C})(a_1,a_3,a_n)\end{aligned} \tag{4.64}$$

4.1.9　充足性とモデル

$\mathcal{G}$ を $\mathbf{L}$ の部分集合の論理式の集合

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\cdots,\} \tag{4.65}$$

とする

1. 充足性解釈 $\mathcal{M}=(\mathbf{D},\rho,\pi)$ と対象変数記号と $\mathbf{D}$ の要素の対応 α に対して

   $$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{A}_i] = T,\ i=1,2,\cdots, \tag{4.66}$$

   のとき, $\mathcal{M}=(\mathbf{D},\rho,\pi)$ と α は $\mathcal{G}=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\cdots,\}$ を充足するという。このとき,

   $$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{G}] = T \tag{4.67}$$

   と書くことにする。

2. モデル解釈 $\mathcal{M}=(\mathbf{D},\rho,\pi)$ と対象変数記号全体と $\mathbf{D}$ の要素の任意の対応 α に対して

   $$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{A}_i] = T,\ i=1,2,\cdots, \tag{4.68}$$

   のとき, $\mathcal{M}=(\mathbf{D},\rho,\pi)$ は $\mathcal{G}=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\cdots,\}$ のモデルであるという。このとき

   $$\tau(\mathcal{M})[\mathcal{G}] = T \tag{4.69}$$

   と書くことにする。

4.1.10 述語論理の完全性定理

命題論理と同様に 体系 H については，次の事実が知られている:

定理 10(述語論理の妥当性) 論理式 $\mathcal{A}$ が H で証明可能 ($\vdash_H \mathcal{A}$) ならば任意の解釈に対して $\mathcal{A}$ が恒真論理式である。即ち，任意の解釈 $\mathcal{M}(\mathbf{D}, \rho, \pi)$ に対して

$$\tau(\mathcal{M}))[\mathcal{A}] = T \tag{4.70}$$

□ この定理は，述語論理の体系についての**妥当性**と呼ばれるものである。

妥当性の証明

$\vdash_H \mathcal{A}$ が成り立つとすると ；系 H の「証明」である論理式の列

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$$

があって，$\mathcal{A}$ は最後の $\mathcal{A}_n$ と一致しているものとしてよい。命題論理の妥当性の証明と同様，$\mathcal{A}_k$ の添え字 k についての数学的帰納法による。

各 $\mathcal{A}_i$ は

(1) 公理系の各公理の形の論理式である場合、公理 (1) から (15) までは命題論理の公理系のそれと同じ形式で容易に恒真論理式であることを示すことができる。ここでは，(16),(17) が恒真論理式であることを示そう。任意の解釈 $\mathcal{M} = (\mathbf{D}, \rho, \pi)$ と対象変数記号と $\mathbf{D}$ の要素との対応 α に対して，

(16) 式については：

$$\tau(\mathcal{M}, \alpha)(t) = d \in \mathbf{D} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{M}, \alpha)[(\forall x)(\mathcal{C}(x)) \Rightarrow C(t)] \quad &= \tau(\mathcal{M}, \alpha)[\neg(\forall x)(\mathcal{C}(x)) \vee C(t)] \\ &= \neg\tau(\mathcal{M}, \alpha)[(\forall x)(\mathcal{C}(x))] \vee \tau(\mathcal{M}, \alpha)[C(t)] \\ &= \neg \bigwedge_{b \in \mathbf{D}} \tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{C}](b) \vee (\tau(\mathcal{M}, \alpha)[C](d) \end{aligned} \tag{4.72}$$

さらに右辺は

$$\begin{aligned} &= \bigvee_{b \in \mathbf{D}} \{\neg\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{C}](b)\} \vee \tau(\mathcal{M}, \alpha)[C](d) \\ &= \bigvee_{b \in \mathbf{D}, b \neq d} \{\neg\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{C}](b)\} \\ &\vee \neg\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{C}(d)] \vee \tau(\mathcal{M}, \alpha)[C](d) \end{aligned} \tag{4.73}$$

さらに続ければ

$$\begin{aligned} &= \bigvee_{b \in \mathbf{D}, b \neq d} \{\neg\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{C}](b)\} \vee T \\ &= T \end{aligned} \tag{4.74}$$

(17) 式については：

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}(t)] \Rightarrow (\exists x)(\mathcal{C}(x))] \qquad = \neg\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](d) \vee \tau(\mathcal{M},\alpha)[(\exists x)(\mathcal{C}(x))] \tag{4.75}$$

さらに右辺は

$$\begin{aligned}
&= \neg\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](d) \vee \bigvee_{b\in\mathbf{D}} \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b)\\
&= \neg\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](d) \vee \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](d)\\
&\vee \bigvee_{b\in\mathbf{D},b\neq d} \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b)\\
&= T \vee \bigvee_{b\in\mathbf{D},b\neq d} \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b)\\
&= T
\end{aligned} \tag{4.76}$$

(2) 論理式 $\mathcal{A}_k$ の前に論理式 $\mathcal{A}_i$ と $\mathcal{A}_j$ $(i,j<k)$ があり，$\mathcal{A}_j$ は $\mathcal{A}_i \Rightarrow \mathcal{A}_k$ の形をしている。k より前の論理式は恒真論理式であると仮定されているから，$\mathcal{A}_i$ と $\mathcal{A}_i \Rightarrow \mathcal{A}_k$ が真理値 T しかとらないから真理値表

$\mathcal{A}_i$	$\mathcal{A}_k$	$\mathcal{A}_i \Rightarrow \mathcal{A}_k$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

から明らかなように $\mathcal{A}_k$ の真理値は T しか取り得ない。すなわち $\mathcal{A}_k$ は恒真論理式である。

(3) **論理式** $\mathcal{A}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{A}_j$ $(j<k)$ があり，$\mathcal{A}_j$ は

$$\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}(t) \tag{4.77}$$

であり，$\mathcal{A}_k$ は

$$\mathcal{C} \Rightarrow (\forall t)(\mathcal{D}(t)) \tag{4.78}$$

の形をしている場合。 ただし t は自由変数記号で $\mathcal{C}$ には現れないものとする。この場合，まず,$\mathcal{A}_k$ の $\mathcal{M},\alpha$ での真理値は

$$\begin{aligned}
&\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C} \Rightarrow (\forall t)(\mathcal{D}(t))]\\
&= \neg\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}] \vee \bigwedge_{b\in\mathbf{D}} \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b)\\
&= \bigwedge_{b\in\mathbf{D}} \{\neg\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}] \vee \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b)\}
\end{aligned} \tag{4.79}$$

である。しかし, 帰納法の仮定から $\mathcal{A}_j$ すなわち

$$\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}(t) \tag{4.80}$$

は任意の $\mathcal{M},\alpha$ について

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}(t)] = T \tag{4.81}$$

ゆえ任意の $b \in \mathbf{D}$ について

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[(\neg\mathcal{C} \vee \mathcal{D}(b)] = T \tag{4.82}$$

従って

$$\bigwedge_{b\in\mathbf{D}}\{\neg\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}]\vee\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b)\}=T \tag{4.83}$$

すなわち，

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}\Rightarrow(\forall t)(\mathcal{D}(t))]=T \tag{4.84}$$

最後に，

(4) **論理式** $\mathcal{A}_k$ の前に**論理式** $\mathcal{A}_j$ $(j<k)$ があり，$\mathcal{A}_j$ は

$$\mathcal{C}(t)\Rightarrow\mathcal{D} \tag{4.85}$$

であり，$\mathcal{A}_k$ は

$$(\exists t)(\mathcal{C}(t))\Rightarrow\mathcal{D} \tag{4.86}$$

の形をしている場合を考えよう。 ただし t は自由変数記号で $\mathcal{D}$ には現れないものとする。まず，

$$\begin{aligned}&\tau(\mathcal{M},\alpha)[(\exists t)(\mathcal{C}(t))\Rightarrow\mathcal{D}]\\&=\neg\bigvee_{b\in\mathbf{D}}\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b)\vee\mathcal{D}\\&=\bigwedge_{b\in\mathbf{D}}\neg\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b)\vee\mathcal{D}\end{aligned} \tag{4.87}$$

さらに右辺は

$$\begin{aligned}&=\bigwedge_{b\in\mathbf{D}}\{\neg\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b)\vee\mathcal{D}\}\\&=\bigwedge_{b\in\mathbf{D}}\{\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b)\Rightarrow\mathcal{D}\}\end{aligned} \tag{4.88}$$

しかし帰納法の仮定から $\mathcal{A}_j$ すなわち

$$\mathcal{C}(t)\Rightarrow\mathcal{D} \tag{4.89}$$

任意の $\mathcal{M},\alpha$ について

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}(t)\Rightarrow\mathcal{D}]=T \tag{4.90}$$

従って任意の $b\in\mathbf{D}$ について

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}(b)\Rightarrow\mathcal{D}]=T \tag{4.91}$$

よって

$$\bigwedge_{b\in\mathbf{D}}\{\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b)\Rightarrow\mathcal{D}\}=T \tag{4.92}$$

すなわち

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[(\exists t)(\mathcal{C}(t))\Rightarrow\mathcal{D}]=T \tag{4.93}$$

□

定理 11(述語論理の無矛盾性) 述語論理の公理系 H は無矛盾である。すなわち

$$\vdash_H\mathcal{A}\qquad\vdash_H\neg\mathcal{A} \tag{4.94}$$

となるような論理式は存在しない。□

この定理は，述語論理の体系についての**無矛盾性**と呼ばれるものである。

無矛盾性の証明　命題論理の証明と全く同じである。系 H が矛盾すれば定理 6 により任意の論理式 $\mathcal{C}$ が証明可能である。従って，$\mathcal{C}$ は述語論理の妥当性の定理により任意の解釈 $\mathcal{M}$ について恒真論理式である。しかるに，H の 0 変数の述語記号 $\mathbf{P}^0$，すなわち命題変数は論理式ではあるが恒真論理式ではない。□

定理 12(述語論理の完全性定理)　$\mathcal{A}$ が恒真論理式であることの必要十分条件は，$\vdash_H \mathcal{A}$ が成立することである。□

この定理は，述語論理の体系についての**完全性定理** (completeness theorem) と呼ばれるものである。

完全性定理の証明　$\vdash_H \mathcal{A}$ が成立すれば任意の解釈 $\mathcal{M}$ について

$$\tau(\mathcal{M})[\mathcal{A}] = T \tag{4.95}$$

すなわち $\mathcal{A}$ が恒真論理式であることは妥当性の定理で既に証明済みである。

逆に $\mathcal{A}$ が恒真論理式であるときに，$\vdash_H \mathcal{A}$ が成立することをいうには次の **Henkin** の定理を利用する。

Henkin の定理　論理式の集合 $\mathcal{G}$ が無矛盾ならば $\mathcal{G}$ は充足可能である。すなわち解釈 $\mathcal{M} = (\mathbf{D}, \rho, \pi)$ と，対象変数記号と $\mathbf{D}$ との対応 α が存在して, $\mathcal{G}$ の任意の論理式 $\mathcal{A}$ について

$$\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{A}] = T \tag{4.96}$$

□

定理 12 の証明の続き

任意の解釈 $\mathcal{M}$ について

$$\tau(\mathcal{M})[\mathcal{A}] = T \tag{4.97}$$

であるすれば

$$\tau(\mathcal{M})[\neg\mathcal{A}] = T \tag{4.98}$$

となる解釈 $\mathcal{M}$ は存在しない。すなわち $\mathcal{G} = \{\neg\mathcal{A}\}$ は充足し得ない。

Henkin の定理の対偶によれば, 体系 $\mathcal{G} = \{\neg\mathcal{A}\}$ は矛盾する。
定理 5 によれば, 任意の論理式 $\mathcal{B}$ について

$$\neg\mathcal{A} \vdash_H \mathcal{B} \tag{4.99}$$

かつ

$$\neg\mathcal{A} \vdash_H \neg\mathcal{B} \tag{4.100}$$

である。
これらから演繹定理 8 によれば

$$\vdash_H \neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \tag{4.101}$$

$$\vdash_H \neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B} \tag{4.102}$$

を得る。これらから公理 (5) を用いれば

$$\vdash_H (\neg\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B}) \tag{4.103}$$

対偶をとれば

$$\vdash_H (\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \tag{4.104}$$

ここで, 公理 (15) によれば

$$\vdash_H \neg\mathcal{B} \vee \mathcal{B} \tag{4.105}$$

従って

$$\vdash_H \mathcal{A} \tag{4.106}$$

を得る。□

Henkin の定理の証明 論理式の集合 $\mathcal{G}$ が無矛盾とする。段階的に $\mathcal{G}$ が充足可能であることを示そう。

1. **定義**
   論理式の集合 $\mathcal{L}$ に論理式 $\mathcal{C}$ を加えた $\mathcal{L} \cup \{\mathcal{C}\}$ が矛盾するとき，$\mathcal{C}$ は $\mathcal{L}$ と矛盾するという。

2. $\mathcal{C}$ が $\mathcal{L}$ と矛盾するときは必ず，$\mathcal{L}$ の有限部分集合 $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n\} \subset \mathcal{L}$ と矛盾している。
   実際,

$$\mathcal{L} \quad \vdash_H \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \tag{4.107}$$

   となる論理式 $\mathcal{B}$ あれば，$\mathcal{B}$，$\neg\mathcal{B}$ の証明である論理式の有限列

$$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{B} \tag{4.108}$$

   と

$$\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \cdots, \neg\mathcal{B} \tag{4.109}$$

   が存在するが，これらに現われる $\mathcal{L}$ の論理式と公理は有限個しかない。他の論理式は推論規則によって，上の有限列中に現われる $\mathcal{L}$ の論理式と公理から導出されている。従って，$\mathcal{B}$，$\neg\mathcal{B}$ は有限個の L の論理式と公理から導出される。□

3. **定義**
   論理式の集合 $\mathcal{L}$ が無矛盾で，$\mathcal{L}$ に属さない総ての論理式が $\mathcal{L}$ と矛盾するとき $\mathcal{L}$ を最大無矛盾集合という。

4. **定義**
   自由変数記号 (限定記号で束縛されていない対象変数記号) を持たない論理式を個体閉論理式という。

5. **補題**
   $\mathcal{K}$ を述語論理の系 H の個体閉論理式全体の集合とする。
   $\mathcal{K}_0$ を $\mathcal{K}$ の無矛盾な部分集合とする。
   $\mathcal{K}_0$ をその部分集合として含む最大無矛盾集合 $\mathcal{L}$ が存在する。□

補題の証明 述語論理の論理式は対象定数記号，対象変数記号，論理記号，関数記号，述語記号を有限個並べた記号列であり，その論理式全体の集合は高々加算無限集合である。
(要素は無限個でもその要素一つ一つに自然数による番号を付与することができる。)
従って，論理式全体の集合の部分集合 $\mathcal{K}$ も高々加算である。
$\mathcal{K}$ の要素である論理式に番号を付けておく。
$\mathcal{K}_0$ から初めて，以下の手順で，論理式の集合 $\mathcal{K}_n$ を構成する。

(a) $\mathcal{K}$ の $n+1$ 番目の論理式が $(\forall a)\mathcal{A}(a)$ の形であるとき。
$\mathcal{K}_n$ の論理式すべてと，$\mathcal{A}$ の中に現われない対象定数記号 v を選び，論理式 $\mathcal{A}(v) \Rightarrow (\forall a)\mathcal{A}(a)$ を $\mathcal{K}_n$ に追加して，$\mathcal{K}_{n+1}$ とする。即ち，

$$\mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{K}_n \cup \{\mathcal{A}(v) \Rightarrow (\forall a)\mathcal{A}(a)\} \tag{4.110}$$

とする。

(b) $\mathcal{K}$ の $n+1$ 番目の論理式が $(\forall a)\mathcal{A}(a)$ の形でないときは何も追加せず

$$\mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{K}_n \tag{4.111}$$

とする。

上の構成手続きによって個体閉論理式の集合の増大列

$$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \cdots \mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_{n+1} \cdots \tag{4.112}$$

が得られるが，$\mathcal{K}_n$ はすべて無矛盾集合である。
これを示すには n についての帰納法による。
$n = 0$ については $\mathcal{K}_0$ の仮定により，無矛盾。$\mathcal{K}_n$ が無矛盾として $\mathcal{K}_{n+1}$ が矛盾するとすれば，ある論理式 $\mathcal{B}$ が存在して，

$$\mathcal{K}_n, \mathcal{A}(v) \Rightarrow (\forall a)\mathcal{A}(a) \vdash_H \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \tag{4.113}$$

$\mathcal{K}_n$ の論理式すべてと，$\mathcal{A}$ の中に現われない対象変数記号 w を選べば，$\mathcal{A}(a)$ の a を w に書き換えた論理式を $\mathcal{A}(w)$ とすると

$$\mathcal{A}(v) \Rightarrow \mathcal{A}(w) \tag{4.114}$$

から

$$[\mathcal{A}(w) \Rightarrow (\forall a)\mathcal{A}(a)] \Rightarrow [\mathcal{A}(v) \Rightarrow (\forall a)\mathcal{A}(a)] \tag{4.115}$$

よって，

$$\mathcal{K}_n, \mathcal{A}(w) \Rightarrow (\forall a)\mathcal{A}(a) \vdash_H \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \tag{4.116}$$

こから演繹定理により，

$$\mathcal{K}_n \vdash_H (\forall w)(\mathcal{A}(w) \Rightarrow (\forall a)\mathcal{A}(a)) \Rightarrow \mathcal{B} \tag{4.117}$$

$$\mathcal{K}_n \vdash_H (\forall w)(\mathcal{A}(w) \Rightarrow (\forall a)\mathcal{A}(a)) \Rightarrow \neg\mathcal{B} \tag{4.118}$$

これらから，

$$\mathcal{K}_n \vdash_H \neg(\forall w)(\mathcal{A}(w) \Rightarrow (\forall a)\mathcal{A}(a)) \tag{4.119}$$

を得て，$\mathcal{A}(w)$ では a は自由変数でないから冠頭標準形の議論により，

$$(\forall w)(\mathcal{A}(w) \Rightarrow (\forall a)\mathcal{A}(a)) \Leftrightarrow (\forall w)(\forall a)(\mathcal{A}(w) \Rightarrow \mathcal{A}(a)) \tag{4.120}$$

従って，

$$\mathcal{K}_n \vdash_H \neg(\forall w)(\forall a)(\mathcal{A}(w) \Rightarrow \mathcal{A}(a)) \tag{4.121}$$

これから

$$\mathcal{K}_n \vdash_H \neg(\forall a)(\mathcal{A}(a) \Rightarrow \mathcal{A}(a)) \tag{4.122}$$

しかし，公理 (1) と推論規則「全称化」によれば，

$$\mathcal{K}_n \vdash_H (\forall a)(\mathcal{A}(a) \Rightarrow \mathcal{A}(a)) \tag{4.123}$$

従って，$\mathcal{K}_n$ は矛盾する。これは帰納法の仮定に反する。よって $\mathcal{K}_{n+1}$ は無矛盾。□

結局，無矛盾な個体閉論理式の集合の増大列

$$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \cdots \mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_{n+1} \cdots \tag{4.124}$$

が得られていた。

ここで，

$$\mathcal{L} = \cup_{n=0}^{n=\infty} \mathcal{K}_n \tag{4.125}$$

とおけば，$\mathcal{L}$ も無矛盾である。実際，

$$\mathcal{L} \quad \vdash_H \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \tag{4.126}$$

となる論理式 $\mathcal{B}$ あれば，$\mathcal{B}$，$\neg\mathcal{B}$ の証明である論理式の有限列

$$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{B} \tag{4.127}$$

と

$$\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \cdots, \neg\mathcal{B} \tag{4.128}$$

が存在するが，これらに現われる $\mathcal{L}$ の論理式と公理は有限個しかない。他の論理式は推論規則によって，上の有限列中に現われる $\mathcal{L}$ の論理式と公理から導出されている。従って，$\mathcal{B}$，$\neg\mathcal{B}$ は有限個の $\mathcal{L}$ の論理式と公理から導出される。n を十分大きく取れば，$\mathcal{K}_n$ がそれらの論理式を全てその要素としてもち，これは $\mathcal{K}_n$ 自身が既に矛盾することを示す。□

6. 最大無矛盾集合 $\mathcal{L}$ は以下の性質をもつ。
   (a) $\mathcal{K}$ に属する論理式 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{L}$ の元なら $\neg\mathcal{A}$ は $\mathcal{L}$ の元でない
   実際，$\neg\mathcal{A}$ も $\mathcal{L}$ の元なら $\mathcal{L}$ は矛盾する。□
   (b) $\mathcal{K}$ の論理式 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{L}$ の元でないならば $\neg\mathcal{A}$ は $\mathcal{L}$ の元である。
   実際，$\mathcal{A}$ が $\mathcal{L}$ の元でないなら $\mathcal{L}$ の最大性により，$\mathcal{L} \cup \{\mathcal{A}\}$ は矛盾。従って論理式 $\mathcal{B}$ が存在して

$$\mathcal{L}, \neg\mathcal{A} \vdash_H \mathcal{B}, \neg\mathcal{B} \tag{4.129}$$

これらから演繹定理 8 によれば

$$\mathcal{L} \vdash_H \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B} \tag{4.130}$$

対偶をとれば

$$\mathcal{L} \vdash_H (\neg\mathcal{B} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \neg\mathcal{A} \tag{4.131}$$

ここで, 公理 (15) によれば

$$\mathcal{L} \vdash_H \neg\mathcal{B} \vee \mathcal{B} \tag{4.132}$$

従って

$$\mathcal{L} \vdash_H \neg\mathcal{A} \tag{4.133}$$

を得る。従って $\neg\mathcal{A}$ は $\mathcal{L}$ と無矛盾。従ってこれの元となる。□

(c) $\mathcal{K}$ に属する論理式 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が両方とも $\mathcal{L}$ の元であるとき，$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ は $\mathcal{L}$ の元である。
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が両方とも $\mathcal{L}$ の元なら推論規則「論理積」により

$$\mathcal{L} \vdash_H \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \tag{4.134}$$

で $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ は $\mathcal{L}$ と無矛盾。□

(d) $\mathcal{K}$ に属する論理式 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ のどちらか一方が $\mathcal{L}$ の元でないとき，$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ は $\mathcal{L}$ の元でない。
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ が $\mathcal{L}$ の元なら，公理 (6), (7) から $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の何れも $\mathcal{L}$ と矛盾しない。これから $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の何れも $\mathcal{L}$ の元なる。□

(e) $\mathcal{K}$ に属する論理式 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ がのどちらか一方が $\mathcal{L}$ の元であるとき，$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ は $\mathcal{L}$ の元である。
証明は $\wedge$ の場合と双対であるから省略する。

(f) $\mathcal{K}$ に属する論理式 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が両方とも $\mathcal{L}$ の元でないとき，$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ は $\mathcal{L}$ の元でない。
証明は $\wedge$ の場合と双対であるから省略する。

(g) a を対象変数記号，c を対象定数記号とする。すべての c について $\mathcal{K}$ に属する論理式 $\mathcal{A}(c)$ が $\mathcal{L}$ の元であるとき，$(\forall a)(\mathcal{A}(a))$ は $\mathcal{L}$ の元である。

$(\forall a)\mathcal{A}(a)$ が $\mathcal{K}$ の $n+1$ 番目の個体閉論理式とすると，$\mathcal{K}_{n+1}$ の構成法から $\mathcal{K}_{n+1}$ は, 論理式

$$\mathcal{A}(w) \Rightarrow (\forall a)\mathcal{A}(a) \tag{4.135}$$

を元にもつ。w は $\mathcal{K}_n$ の全ての論理式と $\mathcal{A}$ に現われない対象変数記号である。仮定から，$\mathcal{A}(w)$ は $\mathcal{L}$ の元ゆえ,

$$(\forall a)\mathcal{A}(a) \tag{4.136}$$

も $\mathcal{L}$ と矛盾せず，$\mathcal{L}$ の最大性から $(\forall a)\mathcal{A}(a)$ は，$\mathcal{L}$ の元となる。□

(h) a を対象変数記号，c を対象定数記号とする。少なくとも一つの c について $\mathcal{K}$ に属する論理式 $(\mathcal{A}(c))$ が $\mathcal{L}$ の元でないとき，$(\forall a)(\mathcal{A}(a))$ は $\mathcal{L}$ の元でない。

$(\forall a)(\mathcal{A}(a))$ は $\mathcal{L}$ の元ならば，公理 (16) により，$\mathcal{A}(w)$ について $\mathcal{L} \vdash_H \mathcal{A}(w)$ であり，従って，$\mathcal{L}$ と矛盾しないから，その元になる。

(i) a を対象変数記号，c を対象定数記号とする。少なくとも一つの c について $\mathcal{K}$ に属する論理式 $\mathcal{A}(c)$ が $\mathcal{L}$ の元であるとき，$(\exists a)(\mathcal{A}(a))$ は $\mathcal{L}$ の元である。
証明は $\forall$ の場合と双対であるから省略する。

(j) a を対象変数記号，c を対象定数記号とする。すべての c について $\mathcal{K}$ に属する論理式 $\mathcal{A}(c)$ が $\mathcal{L}$ の元でないならば，$(\exists a)(\mathcal{A}(a))$ は $\mathcal{L}$ の元でない。
証明は $\forall$ の場合と双対であるから省略する。

7. 最大無矛盾集合 $\mathcal{L}$ を用いた H の解釈
以下のように解釈 $\mathcal{M} = (\mathbf{D}, \rho, \pi)$ を構成する。

(a) $\mathbf{D}$ を対象定数記号全体の集合とする。

(b) H の対象変数記号に $\mathbf{D}$ の要素を対応させる対応 α は任意にとる。

(c) 関数記号と $\mathbf{D}$ 上の関数との対応 ρ：
n 変数の関数記号の全体 $\mathcal{F}^n$ と $\mathbf{D}$ 上の関数全体の集合

$$\mathcal{F}(\mathbf{D}^n, \mathbf{D}) = \{f | f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{D}^n \mapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{D}\} \tag{4.137}$$

の間の対応 ρ は $\phi^n \in \mathcal{F}^n$ に対して

$$\rho(\phi^n)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \phi^n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \in \mathbf{D}^n \tag{4.138}$$

で定義する。(結局，恒等対応で，$\rho(\phi^n)$ は ϕ^n の定義域を $\mathbf{D}$ に制限するだけである。)

(d) H の述語記号と $\mathbf{D}$ 上の述語との対応 ：
真理値の集合を $\mathbf{V} = \{T, F\}$，H の n 変数の述語記号の全体の集合 $\mathcal{P}^n$ と, $\mathbf{D}$ 上の n 変数の述語全体の集合

$$\mathcal{P}(\mathbf{D}^n; \mathbf{V}) = \{P | P : (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{D}^n \mapsto P(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{V}\} \tag{4.139}$$

の間の対応

$$\mathbf{P}^n \in \mathcal{P}^n \mapsto \pi(\mathbf{P}^n) \in \mathcal{P}(\mathbf{D}^n, \mathbf{V}) \tag{4.140}$$

については，n 変数の述語記号 $\mathbf{P}^n$ に

$$\begin{aligned}&(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{D}^n \mapsto \mathbf{Q}(y_1, y_2, \cdots, y_n)\\ &= \begin{cases} T & \mathbf{P}(y_1, y_2, \cdots, y_n) \text{ が } \mathcal{L} \text{ に属する} \\ F & \mathbf{P}(y_1, y_2, \cdots, y_n) \text{ が } \mathcal{L} \text{ に属さない} \end{cases}\end{aligned}$$

となる述語 $\mathbf{Q}$ を対応させる。

以上の構成法により，H の任意の論理式 $\mathcal{A}$ について $\mathcal{A}$ が $\mathcal{L}$ の元でないとき

$$\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{A}] = F \tag{4.141}$$

また $\mathcal{A}$ が $\mathcal{L}$ の元のとき

$$\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{A}] = T \tag{4.142}$$

これは論理式 $\mathcal{A}$ の記号列のとしての長さについての帰納法による。

(a) 論理式 $\mathcal{A}$ が n 変数述語記号 $\mathbf{P}$ と項 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ を用いて

$$\mathbf{P}(c_1, c_2, \cdots, c_n) \tag{4.143}$$

で表されるとき：

$$\mathbf{P}(c_1, c_2, \cdots, c_n) \tag{4.144}$$

が $\mathcal{L}$ に属すれば
π の定義から,

$$\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{A}] = \pi(\mathbf{P})(c_1, c_2, \cdots, c_n) = T \tag{4.145}$$

$\mathcal{L}$ に属さなければ
π の定義から,

$$\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{A}] = \pi(\mathbf{P})(c_1, c_2, \cdots, c_n) = F \tag{4.146}$$

(b) 論理式 $\mathcal{A}$ が $\neg\mathcal{B}$ の形をしている場合。

i. $\neg\mathcal{B}$ が $\mathcal{L}$ に属すれば $\mathcal{B}$ は $\mathcal{L}$ に属さない。この論理式の長さは $\mathcal{A}$ より短いので，帰納法の仮定により,

$$\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{B}] = F \tag{4.147}$$

よって

$$\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{A}] = \neg\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{B}] = T \tag{4.148}$$

ii. $\neg\mathcal{B}$ が $\mathcal{L}$ に属さなければ $\mathcal{B}$ は $\mathcal{L}$ に属す。この論理式の長さは $\mathcal{A}$ より短いので，帰納法の仮定により，

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{B}] = T \tag{4.149}$$

よって

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{A}] = \neg\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{B}] = F \tag{4.150}$$

(c) 論理式 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}\vee\mathcal{C}$ の形をしている場合。

i. $\mathcal{B}\vee\mathcal{C}$ が $\mathcal{L}$ に属せば $\mathcal{B},\mathcal{C}$ のうち少なくとも一方は $\mathcal{L}$ に属する。これらの論理式の長さは $\mathcal{A}$ より短いので，帰納法の仮定により，

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{B}] = T \tag{4.151}$$

または

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}] = T \tag{4.152}$$

よって

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{A}] = \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{B}]\vee\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}] = T \tag{4.153}$$

ii. $\mathcal{B}\vee\mathcal{C}$ が $\mathcal{L}$ に属さなければ
$\mathcal{B},\mathcal{C}$ の何れも $\mathcal{L}$ に属さない。$\mathcal{B}$ は $\mathcal{L}$ に属す。この論理式の長さは $\mathcal{A}$ より短いので，帰納法の仮定により，

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{B}] = F \tag{4.154}$$

かつ

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}] = F \tag{4.155}$$

よって

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{A}] = \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{A}] = \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{B}]\vee\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}] = F \tag{4.156}$$

(d) 論理式 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$ の形をしている場合。

$$\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C} = \neg\mathcal{B}\vee\mathcal{C} \tag{4.157}$$

で $\vee,\neg$ の結果を用いて示すことができるので省略する。

(e) $\mathcal{C}(a)$ が対象変数記号 a を含む論理式で，a が自由変数記号，x を $\mathcal{C}(a)$ の中に現れない対象変数記号，$\mathcal{A}$ が $(\forall x)(\mathcal{C}(x))$ の形をしているとき。

i. $(\forall x)(\mathcal{C}(x))$ が $\mathcal{L}$ に属すれば $\mathcal{L}$ の性質について述べたことから，すべての対象定数記号 v について $\mathcal{C}(v)$ は $\mathcal{L}$ の元。従って，

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}(v)] = \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](v) = T \tag{4.158}$$

ここで，$\rho(v) = v$ に注意する。従って，

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[(\forall x)(\mathcal{C}(x))] = \bigwedge_{b\in\mathbf{D}}\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b) = T \tag{4.159}$$

ii. $(\forall x)(\mathcal{C}(x))$ が $\mathcal{L}$ に属さなければ $\mathcal{L}$ の性質について述べたことから，ある対象定数記号 v について $\mathcal{C}(v)$ は $\mathcal{L}$ の元でない。従って，

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}(v)] = \tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](v) = F \tag{4.160}$$

従って，

$$\tau(\mathcal{M},\alpha)[(\forall x)(\mathcal{C}(x))] = \bigwedge_{b\in\mathbf{D}}\tau(\mathcal{M},\alpha)[\mathcal{C}](b) = F \tag{4.161}$$

(f) $\mathcal{C}(a)$ が対象変数記号 a を含む論理式で，a が自由変数記号，x を $\mathcal{C}(a)$ の中に現れない対象変数記号，$\mathcal{A}$ が $(\exists x)(\mathcal{C}(x))$ の形をしているとき。これも $(\forall x)(\mathcal{C}(x))$ の場合と双対的にできるので省略する。

8. $\mathcal{K}_0$ は $\mathcal{L}$ の部分集合である。

$$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}, \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{L} \tag{4.162}$$

従って，$\mathcal{K}_0$ の任意の論理式 $\mathcal{C}$ について

$$\tau(\mathcal{M}, \alpha)[\mathcal{C}] = T \tag{4.163}$$

即ち，$\mathcal{K}_0$ は充足可能である。

9. $\mathcal{G}$ から無矛盾な個体閉論理式の集合 $\mathcal{K}_0$ を作る。

(a) $\mathcal{G}$ の論理式の自由変数記号に対象定数記号を代入する。こうしてできる論理式は個体閉論理式である。

(b) $\mathcal{G}$ の総ての論理式のこの操作を施して作った論理式の集合を $\mathcal{K}_0$ で表す。$\mathcal{G}$ が無矛盾ゆえ $\mathcal{K}_0$ は無矛盾である。
例

$$(\forall x)(\exists y)\mathbf{P}(x, y, z) \tag{4.164}$$

から自由変数 z に対象定数記号 c を代入すると

$$(\forall x)(\exists y)\mathbf{P}(x, y, c) \tag{4.165}$$

を得る。

(c) 個体閉論理式の集合 $\mathcal{K}_0$ が無矛盾であれば，充足可能なことは示した。さらに $\mathcal{K}_0$ の $\mathcal{G}$ からの構成法から $\mathcal{G}$ は充足可能である。

第5章　導出原理

5.1　導出原理

この章では個体閉論理式

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$$

から論理式 $\mathcal{B}$ を導出原理を用いて証明する方法を説明する。

体系 H の公理系に論理式

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$$

を追加してできる新たな系で論理式 $\mathcal{B}$ が証明可能であるとき，このことを

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \vdash_H \mathcal{B} \tag{5.1}$$

で表した。このとき**演繹定理**によれば,

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1} \vdash_H (\forall a_1)(\forall a_2)\cdots(\forall a_l)\mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B} \tag{5.2}$$

が成り立つ。 $a_1, a_2 \cdots a_l$ は $\mathcal{A}_n$ に現れる総ての自由変数記号とする。□

特に

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \tag{5.3}$$

が自由変数を持たない個体閉論理式の集合であれば，全称記号 $\forall$ の作用は無効になるから

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_{n-1} \vdash_H \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B} \tag{5.4}$$

であり，これと公理 (6), (7)

$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \tag{5.5}$$

$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B} \tag{5.6}$$

を繰り返し用いて,

$$\vdash_H \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_{n-1} \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B} \tag{5.7}$$

上の議論の逆を辿れば，結局,

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \vdash_H \mathcal{B} \tag{5.8}$$

が成立つのは

$$\vdash_H \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_{n-1} \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B} \tag{5.9}$$

が成立つとき，かつそのときに限る。
完全性定理によれば，後者は,

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_{n-1} \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B} \tag{5.10}$$

が恒真論理式であることに等しい。
これはこの論理式の否定

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_{n-1} \wedge \mathcal{A}_n \wedge \neg\mathcal{B} \tag{5.11}$$

が恒偽論理式であること，すなわち充足不能であることと同じである。

5.1.1　スコーレム標準形

次のステップは

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_{n-1} \wedge \mathcal{A}_n \wedge \neg\mathcal{B} \tag{5.12}$$

をスコーレム標準形と呼ばれる特殊な形の論理式に同値変形する。
この同値変形について以下に述べる。

1. 先ず，定理 7 と 8.1, 8.2 により以下の手順で冠頭標準形を導出する。

   (a) 同じ変数名で自由変数と束縛変数が混在する場合は変数名を変更する。
   例えば

   $$(\exists x)(\mathbf{P}(x,y)) \wedge (\forall y)(\mathbf{Q}(y,z)) = (\exists x)(\mathbf{P}(x,y)) \wedge (\forall w)(\mathbf{Q}(w,z)) \tag{5.13}$$

   (b) $\neg$ の右側への移動
   定理 8.1(ド・モルガン則) により

   $$\neg\exists(\cdots) = \forall\neg(\cdots)$$
   $$\neg\forall(\cdots) = \exists\neg(\cdots)$$

   の形の変形を行う。

   (c) 限定記号 $\forall$,　$\exists$ の左側への移動
   定理 8.2 により

   $$(\cdots\exists\cdots) = \exists(\cdots)$$
   $$(\cdots\forall\cdots) = \forall(\cdots)$$

   の形の変形を繰り返し行う。

   (d) (主 $\wedge$ 標準形) への変換アルゴリズムを併用する

2. スコーレム関数の導入
   上の手順で，限定記号全てが左側に移され，内側の論理式は (主 $\wedge$ 標準形) への変換されている。

   ここで，限定記号のうち存在記号 $\exists$ を除去するスコーレム関数を導入する。この関数の構成原理は以下のものである。

   (a) 対象領域 $\mathbf{D}$ 上で定義された 2 変数述語 $\mathbf{P}(x,y)$ について恒真論理式

   $$(\forall x \in \mathbf{D})(\exists y \in \mathbf{D})\mathbf{P}(x,y) \tag{5.14}$$

   が与えられたする。この論理式の意味するところは，
   「対象領域 $\mathbf{D}$ 上の任意の x に対して関係 $\mathbf{P}(x,y)$ を充たす $\mathbf{D}$ の元 y が存在する。」
   である。各 $x \in \mathbf{D}$ についてそのような $y \in \mathbf{D}$ は複数あるもしれないが，その中から一つを選び，$f(x)$ と名づければ

   $$(\forall x \in \mathbf{D})(\mathbf{P}(x, f(x))) \tag{5.15}$$

   を充たす関数

   $$f : x \in \mathbf{D} \mapsto f(x) \in \mathbf{D} \tag{5.16}$$

   が定義されたことになる。

(b) 同様に対象領域 $\mathbf{D}$ 上で定義された 2 変数述語 $\mathbf{P}(x, y)$ について恒真論理式

$$(\exists y \in \mathbf{D})(\forall x \in \mathbf{D})\mathbf{P}(x, y) \tag{5.17}$$

が与えられたとする。これは

$$(\forall x \in \mathbf{D})\mathbf{P}(x, c) \tag{5.18}$$

を充たす $\mathbf{D}$ の要素 c が存在することを示すものであるから，そのような要素 c が一つ選択されたとして，値として c をとる 0 変数定数値関数 f を導入して，上の論理式を

$$(\forall x \in \mathbf{D})\mathbf{P}(x, f) \tag{5.19}$$

と書き換える。

以上の操作によって論理式中から存在記号 $\exists$ を除去することが可能である。ここで導入された f をスコーレム関数という。

5.1.2 導出原理

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ が全て個体閉論理式として，前節まで議論によれば

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n \vdash_H \mathcal{B} \tag{5.20}$$

を示すには

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_{n-1} \wedge \mathcal{A}_n \wedge \neg\mathcal{B} \tag{5.21}$$

が充足不能であることを示せばよく，この論理式はさらに同値変形で以下のようなスコーレム標準形に変形できた。

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)(\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{R}_m) \tag{5.22}$$

ここで，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は $\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{R}_m$ に現れる全ての自由変数である。また各 $\mathcal{R}_i$ は

$$\mathcal{C}_1^i \vee \mathcal{C}_2^i \vee \cdots \vee \mathcal{C}_{k(i)}^i \tag{5.23}$$

の形で，これを節と呼ぶ。
さらに，各 $\mathcal{C}_j^i$ は論理記号を含まない論理式 $\mathcal{P}_j^i$ により，$\mathcal{P}_j^i$ または $\neg\mathcal{P}_j^i$ である。これをリテラル (literal) と呼ぶ。

導出原理

ここで恒真論理式

$$\{(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge ((\neg\mathcal{A}) \vee \mathcal{C})\} \Rightarrow (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \tag{5.24}$$

に注目しよう。これは $\mathcal{A}$ のリテラル ($\mathcal{A}$ または $\neg\mathcal{A}$) を共通にもつ２つの節から共通のリテラルが消去された１つの節を導くものと解釈できる。
節の数が減り，形がより単純化されることに注意しておく。これを推論規則として

$$\frac{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{C}}{\mathcal{B} \vee \mathcal{C}}$$

と表し，導出原理と呼ぶ。

$$\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{R}_m \tag{5.25}$$

に上の推論規則「導出原理」を繰り返し適用して，節の数が，最後に

$$\mathcal{A}, \neg\mathcal{A} \tag{5.26}$$

の 2 つだけになったとすると，これと公理 (11)

$$\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A} \Rightarrow F \tag{5.27}$$

から矛盾が導き出されたことになる。これを「空節」の導出として

$$\frac{\mathcal{A}, \neg\mathcal{A}}{\square}$$

で表すことにする。空節が導かれれば論理式

$$\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{R}_m \tag{5.28}$$

が偽であることを示したことになる。

以上の議論から，

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)(\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{R}_m) \tag{5.29}$$

が充足不能であることを示すには，全ての解釈 $\mathcal{M}$ に対して

$$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \cdots, \mathcal{R}_m \tag{5.30}$$

に導出原理を適用して空節を導けばよいことがわかった。さらに解釈 $\mathcal{M}$ の対象領域 $\mathbf{D}$ については以下のエルブラン領域 $\mathcal{H}_\infty$ だけを調べればよいことが知られている。

エルブラン領域

$$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \cdots, \mathcal{R}_m \tag{5.31}$$

に現れる，対象定数記号全体の集合を Ω, 関数記号の全体を $\mathcal{F}$ とし，エルブラン領域 $\mathcal{H}_\infty$ は次のように帰納的に構成される。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \begin{cases} \Omega, \Omega \neq \phi \\ \{a\}, \Omega = \phi \end{cases} \\ \mathcal{H}_{i+1} &= \mathcal{H}_i \cup \{g(s_1, s_2, \cdots, s_n) | g \in \mathcal{F}, s_1, s_2, \cdots, s_n \in \mathcal{H}_i\} \end{aligned} \tag{5.32}$$

付 録A　FAQ

このセクションでは、質問済みであるにも関わらず、何度も質問されている項目、また、高い点数を与えた質問を中心に FAQ（よくある質問とその答え）としてまとめました。

Q1 見たところ学生から訂正の指摘があった箇所を直していないようなのですが, なぜ直さないのでしょうか。指摘の重なりを防ぐためにも直されたほうがよいのではないでしょうか。

A1 講義終了後５月下旬一括し直したいのです。特にこの形式でやって熱心に教材に取り組んでいるかや他人の質問事項にどれだけ注意を払っているかも興味あるところです。例えば今ごろになって、まだ，命題論理の最初の方をやっているとか， 一方，どんどん先に進んで勉強やっている人がいるとか，ここを観れば直わかるからです。

Q2 情報論理学の講義は，情報工学を学ぼうとしている私たちにどのような意味があるのでしょうか。

A2 これから工学、科学を勉強する上での一般的な数理的，論理的思考法の基礎訓練及び，論理回路などへの導入部分と構造主義的方法への導入という２つの目的があります。

Q3 メタ記号は何語ですか。

A3 これはカリグラフ書体（文字）といいます。普通の A と書くと、これが命題変数なのか、不特定の論理式を表しているのか判らなくなるので論理式の場合はカリグラフ書体を使っています。

Q4 A のひっくり返った記号や E の逆になった記号は何ですか？

A4 for all x 〜の A をひっくり返して $(\forall x)$〜です。意味は「全ての x について〜」です。there exists x 〜の E をひっくり返して $(\exists x)$ 〜です。意味は「ある x が存在して〜」です。

Q5 これは証明可能だと思い込み，間違えてしまうような落とし穴はありますか。私はこうゆうのには, 何かあると思ってしまうのですが。

A5 「証明可能」は「証明できるだろう」と言っているのではなくて問題にしている論理式が,「証明」と呼ばれる論理式の特殊な列に現れるという意味です。

Q6 真理関数の中に同値 ($\Longleftrightarrow$) の記号がありますが、等式の記号 (=) と意味がよく似ており、今一つ区別がつきません。この二つの記号の具体的な違いを教えてください。

A6 $R(X,Y) \iff P(X,Y)$ は２つの論理式 $R(X,Y), P(X,Y)$ が $\iff$ で結合された「論理式」です。$R(X,Y) = P(X,Y)$　というのは $R = P$ と書くほうが $=$ の意味がわかるのですが，両辺の真理値が変数 X,Y の真理値がなにであっても一致するという意味です。

Q7 □は，どういう意味ですか。

A7 「これで示された」,「よって成り立つ」という議論の終わりの記号です。

Q8 P「ソクラテスは人間である。」，Q「ソクラテスは死すべきものである。」とあって、P $\Rightarrow$ Q というのは「人間である」ならば「死すべきものである。」となり⇒は成り立っているが，Q $\Rightarrow$ P の「死すべきものである。」ならば「人間である。」は⇒成り立っているのでしょうか。命題⇒命題とするならQ $\Rightarrow$ P も成り立つのでは。

A8 成立っていません。それが判るのは，本当はPの意味とQの意味がわかるからです。 P⇒Q 自体がTで，PがTならQもTといった話をやるわけです。P⇒Q そのものがなぜTとして良いかどうかは問題にしていです。

Q9 1.2.4 のよく用いられる真理関数の最後の方に

「定理 4, 定理 5 によれば論理記号として $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ を持つものを扱えば充分である。1.1.5 節で示したように命題論理で扱う論理式は再帰的に定義できる。」

と書かれていますが、$\Rightarrow$ は，$\neg(X \Rightarrow Y) = X \wedge \neg Y$ などというように $\neg, \wedge, \vee$ だけで表すことができるので，論理記号としては $\neg, \wedge, \vee$ を持つものだけを扱えばいいのではないでしょうか？

A9 それで、この教材の議論をは全てできます。$\Rightarrow$ をあえて使うのは３段論法など使った記述を判りやすく、短くするためです。

Q10 2.1.1 の n 項述語で,「述語論理ではさらに，何らかの対象の集合 D も定義される。これは具体的には整数の集合や実数の集合であったり，あるいは日本人全体の集合といったものを表したりする」とあり，または空でないことが要求されるとあるということは空でなければ集合 D はどんな集合でもよいということですか。

A10 そうです。

Q11 固体閉論理式についての定義を読みました。自由変数記号（限定記号で束縛されていない対象変数記号）を持たない論理式である。ここの自由変数記号を例を出して説明していただけませんか。

A11 $x > 2$ は（自由）変数が x の述語です。

$$D = (a, b)$$

のとき

$$(\forall x)(x > 2) = (a > 2 \wedge b > 2)$$

だから自由変数なし。つまり個体閉式です。

Q12 妥当性の証明のところで

$$Aj \text{ は } Aj \Rightarrow Ai \text{ は真理値 } T \text{ しかとらないから}$$

というのがよくわかりません。

A12

$$A_j \; A_j \Rightarrow A_i \; A_i$$

というように論理式が並んでて、帰納法の仮定で A_i より前の A_j と $A_j \Rightarrow A_i$ が T あるので, A_i は T になる。という意味です。

Q13 3.1.6 の冠頭標準形の最後,「さらに以上の手順と主標準形 (主標準形) への変換アルゴリズムを併用することができる。」とはどうゆうことですか。どのようにするのですか。

A13 （∀ｘ）（∃ｙ）（(ｘ＞ｙ）⇒（ｙ＝１）∨（ｚ＝２)）

$$(\forall x)(\exists y)((x > y) \Rightarrow (y = 1) \vee (= 2))$$

に適用してみてください。

Q14 4.1.1 の述語論理の完全性定理の妥当性の証明のところで

A は最後の A_n と一致しているものとしてよい

とありますがどうして一致しているものとしてよいのですか。

A14 A が証明可能な論理式なら，ある「証明」

$$A_1, A_2, ..., A_n, ...$$

の中に A が現れるのでそこで列を切ってしまうということです。

Q15 4.1.7 の演繹定理において，$a_1, a_2, ..., a_l$ は A_n に現れる総べての自由変数記号とする。とは具体的にはどのような意味でしょうか。

A15 A_n が例えば,

$$(a_1 = a_2) \wedge (a_3 > a_2)$$

といった論理式ということです。