最適化理論-変分法と$Fréchet$微分-その１

師玉康成

目 次

第1章　ウォーミングアップ

この教材は最適化理論に関するＩＴ大学院のＷＥＢ教材のシリーズのうち，変分法と Frechet 微分についての資料です。
変分法はニュートン・ライプニッツの微積分学ともに発達した古典的理論であり，よく知られる古代カルタゴのディドーの問題のように最適化理論の数多くの具体的な応用問題を提供します。
まず高校や大学１年次の微積分で習った事柄の復習から始めます。

1.1　変分問題 (等周問題)

変分問題などと書くと何やら難しい数学がでてきそうですが
紐の両端を結んで輪にして，テーブルに載せ色々な形の図形を作るのを想像してください。長方形でも，正方形でも，平行四辺形でも，台形でも，楕円でも円でも，三角形でも，歪なじゃがいもみたいな図形でも結構です。

今日の話題はそれらの図形の内，それで囲まれる面積が最大なものは何かというものです。ややこしくなるので，８の字のように中でくびれているのは「ナシ」にします。ですから，楕円やジャガイモ，四角形のような単純な図形を思い浮かべてください。どんな図形を作っても，紐が伸び縮みしないとすると，図形の周囲の長さは一定です。
古代の問題

「周囲の長さが一定な図形のうち，それで囲まれる面積が最大なものを求めよ」

図形の中心付近に原点 O を置き，図形の周上の点を座標で表しましょう。ここで，普通の座標ではなく，局座標を使ってみます。これは，原点からその点までの距離 r と，原点を通って水平な軸から，その点をまでを，原点を中心にして，時計と反対周りに計った角度 θ―ギリシャ文字のシーターの対で (r,θ) で表します。

後の計算を楽にするため角度 θ はラジアン単位で表すことにします。

高校時代習ったと思いますが，2π を 360 度する角度の表示法です。例えば 60 度なら $2\pi \times 60/360 = 1/3\pi$ ラジアン

θ は 0 から 2π まで動き，それに伴って，図形の周上の点は，その周囲を一周してきます。その間，図形が円でなければ，原点 O とその点との距離 r は一定でなく変化します。角度 θ に依存しますので $r(\theta)$ と書いておきます。

さて，図形の周上の 2 点 P と Q の座標が，$P = (r(\theta),\theta)Q = (r(\theta'),\theta')$ のとき，点 P と Q が近くにあれば，角度の差 $\Delta\theta = \theta' - \theta$ は小さくなります。原点 O と P，Q で作られる中心角 $\Delta\theta$ の扇形の弧の長さ Δl は

$$\Delta l = \sqrt{r(\theta)^2 + r(\dot{\theta})^2} \quad \sqrt{r(\theta)^2 + \{\frac{r(\theta') - r(\theta)}{\Delta\theta}\}^2}$$

で近似でき，その面積は，円弧を略，直線 (底辺) と見なしてできる三角形の面積,

$$r(\theta)\Delta\theta \times r(\theta)/2 = r(\theta)^2\Delta\theta/2$$

で近似できます。

それぞれ，隣りあった点の角度の差 $\Delta\theta$ が十分小さく，話を簡単にするため一定になるように，点の数を十分多く取ります。例えば，N を十分大きくして,

$$\Delta\theta = 2\pi/N$$

となるように図形の周囲上の点を

$$P_1, P_2, \cdots, P_N$$

を決めたとします。

$$\begin{aligned} &P_1 = (r(0), 0), P_2 = (r(\Delta\theta), \Delta\theta), \\ &\cdots, P_N = (r((N-1)\Delta\theta), (N-1)\Delta\theta) \end{aligned}$$

面倒なので,

$$r_1 = r(0), r_2 = r(\Delta\theta), \cdots, r_N = r((N-1)\Delta\theta)$$

としておきます。

図形の周の長さ l は，それぞれの扇形の弧の長さの総和で近似でき

$$\begin{aligned} &l \quad \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \cdots \Delta l_N \\ &0 \leq k < N-1 \text{ のとき} \Delta l_k = \sqrt{{r_k}^2 + \{\frac{r_{k+1} - r_k}{\Delta\theta}\}^2} \\ &\Delta l_N = \sqrt{{r_N}^2 + \{\frac{r_0 - r_N}{\Delta\theta}\}^2} \end{aligned}$$

です。また図形の周で囲まれる面積Sは，それぞれの扇形の面積の総和で近似でき

$$S \quad r_1^2+r_2^2+r_3^2+\cdots r_N^2\Delta\theta/2$$

です。

ここで，紐の長さを簡単のため 2π としておきます。すると問題は $l=2\pi$ という制約条件の下で，S が最大になるよう r_1，r_2，r_3，$\cdots$，r_N を決める問題になります。試しに $N=10$ ぐらいにして，Excel の solver などで解いてみてください。

問題の解は，一体，どんな図形でしょうか？

1.2 最短曲線

「平面上の 2 点を結ぶ線分のうち長さが最小のものを求めよ」

簡単のため 2 点の座標を $(0,0)$ と $(10,10)$ とてしておきます。

この 2 点を結ぶ線分を考えます。$x-$軸 の 0 から 10 までを N 等分して

$$\Delta x=10/N$$

$$x_0=0,\quad x_1=\Delta x,\quad x_2=2\Delta x,\cdots,\quad x_{N-1}=(N-1)\Delta x,\quad x_N=N\Delta x=10$$

とし，それに対応した線分上の点を

$$P0=(0,0),\quad p_1=(x_1,y_1),\cdots,\quad PN-1=(x_{N-1},y_{N-1}),\quad PN=(10,10)$$

とします。この $P_0,\cdots,P_N$ を結ぶ折れ線で問題の線分を近似します。

折れ線の線分の長さはピタゴラスの定理を使って

$$L=\{\Delta x^2+(y_1-0)^2\}^{\frac{1}{2}}+\{\Delta x^2+(y_2-y_1)^2\}^{\frac{1}{2}}\cdots+\{\Delta x^2+(10-y_{N-1})^2\}^{\frac{1}{2}}$$

です。L が最小になるように $y_1,y_2,\cdots,y_{N-1}$ を求めればいいわけです。

1.3 陰関数定理とラグランジュ乗数

1.3.1 問題

$L(x,y)=x+y$ とするとき，
半径 1 の円周
$x^2+y^2=1 \qquad (1)$

上の点 (x,y) で $L(x,y)$ の最大にするものを求めよ。

これも Mathematica や Microsoft Excel の solver を使うと簡単に答えが出てきます。例えば Excel の solver なら

	A	B	C
1			$=A1+B1$
2			$=A1\times A1+B1\times B1$

目的のセル	$C$1
目的値	最大値
変化させるセル	$A$1:$B$1
制約条件	$C$2=1

A1 が x を表し，B1 が y を表します。

1.3.2 解析解

解析的に解くなら，以下の道具を使います。

[道具その１]

まず，大学の１年次か高校３年ぐらいで習った極値条件です。

関数の極値条件

実数値関数 $F(x)$ が $x = x_0$ で極小値または極大値をとり，かつ，$x = x_0$ で微分可能であれば，$F(x)$ の $x = x_0$ での微分係数は０である。

$$\frac{dF}{dx}(x_0) = 0$$

[道具その２]

半径１の円の方程式

$x_2 + y_2 = 1 \qquad (1)$

に注目します。判りやすいように,
$1 \geq x \geq -1, 1 \geq y \geq 0$
としておきます。
$g(x) = \sqrt{1-x^2}$
とすると，$1 \geq x \geq -1, 1 \geq y \geq 0$ では (1) の方程式を満たす x,y については
$y = g(x)$
という関係が成り立っています。この $g(x)$ という関数は，(1) 式の中には出てきません。(1) からこのように間接的に導き出される関数を陰関数と呼びます

一般的に書けば $f(x,y) = 0$ という式から陰関数 $y = g(x)$ が定義されるということです。
#上の例では　$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

しかし，何時でも上の例のように，$f(x,y) = 0$ から陰関数 $y = (x)$ が定義されるわけではありません。良く知られる定理では

[陰関数定理]

ある領域 D$\subseteq R \times R$ で関数 $f(x,y)$ が連続でかつ,x,y について偏微分可能で,
その偏導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \qquad (2)$$

も (x,y) について連続とする。
D 内の１点 (x_0, y_0) で $f(x_0, y_0) = 0$ であり,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \qquad (4)$$

とする。

このとき，x_0 を含む $[a,b]$ とその上の連続関数 $g(x)$ が与えられ

(1) 区間 $[a,b]$ 上で $f(x, g(x)) = 0$

(2) $y_0 = g(x_0)$

(3) 区間 $[a,b]$ 上で,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \qquad (5)$$

さて，元の問題に返る準備をします。

関数 $L(x,y)$ が，制約条件
$f(x,y) = 0$
の元に
$(x,y) = (x_0, y_0)$ で極値 (極大値か極小値) をとるとします。
$L(x,y)$ が (x,y) について微分可能な関数で，関数 $f(x,y)$ は (x_0, y_0) が上の道具その 2 の陰関数定理を適用できる条件を満たしているものとします。
すると，x_0 の近傍で関数 $g(x)$ が存在して，x_0 のその近傍では $f(x, g(x)) = 0$ 　が成り立ち，$y_0 = g(x_0)$,$f(x_0, g(x_0)) = 0$ も成り立っています。
すると，関数 $L(x,y)$ は (x_0, y_0) で極値 (極大値か極小値) をとるのですから
$F(x) = L(x, g(x))$ も $x = x_0$ で極値を取ります。

道具その 1 を使えば,

$$\frac{dF}{dx}(x_0) = 0 \qquad (6)$$

です。この x についての微分を求めると $F(x)$ は合成関数ですから

$$\frac{dF}{dx}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x}L(x_0, g(x_0)) + \frac{\partial}{\partial y}L(x_0, g(x_0))\frac{d}{dx}g(x_0) \qquad (7)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \tag{8}$$

$y = g(x)$ でしたから (8) 式を上の (7) 式に代入し

$$\lambda = \frac{\partial}{\partial y} L(x_0, g(x_0))\{-\frac{\partial f}{\partial y}\}^{-1} \tag{9}$$

という変数を使うと，

$$0 = \frac{dF}{dx}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} L(x_0, g(x_0)) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, g(x_0)) \tag{10}$$

また

$$\lambda \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, g(x_0) = -\frac{\partial}{\partial y} L(x_0, g(x)) \tag{11}$$

から

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} L(x_0, g(x_0)) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, g(x_0)) \tag{12}$$

すなわち λ という新しい変数を使って

$$H(x, y, \lambda) = L(x, y) + \lambda f(x, y) \tag{13}$$

という関数を造ると:

「関数 $L(x, y)$ が制約条件

$f(x, y) = 0$

の元に

$(x, y) = (x_0, y_0)$ で極値 (極大値か極小値) をとる」

という条件から H についての制約のない場合の極値条件

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x_0, y_0, \lambda) = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H(x_0, y_0, \lambda) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} H(x_0, y_0, \lambda) = f(x_0, y_0) = 0 \tag{16}$$

が出てきます。

要するに，制約条件付きの極値問題から，λ という人工的な変数を

使って

$$\text{目的の関数} + \lambda \times (\text{制約条件を表す関数})$$

の制約条件のない場合の極値条件が出てきたわけです。
ただしこの議論は「その点が最大 (小) 値を与える」⇒「その点が極値が与える」⇒「その点での微分係数＝０」
という必要条件の連鎖でやってきましたので注意が必要です。

「微分係数＝ 0」は必要条件ですから，これが満たされても，極値かどうかチェックの必要があり，さらには H の極値を与える (x_0, y_0) が求められたとしても，それが最大 (小) 値を与えるのか確かめる必要があります。

また，少なくとも L と f が x, y について微分可能であることも必要です。
ここで使われた λ をラグランジュ乗数といいます。

問題

$L(x, y) = x + y$ とするとき，
半径 1 の円周
$x^2 + y^2 = 1$
上の点 (x, y) で $L(x, y)$ を最大にするものを求めよ。

について
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
として，今までの議論を用いて解を求めてください。
#(14),(15),(16) を連立して解くということです。

第2章　変分法

さて，第1章でのウォーミングアップが終わったところで，本題の変分法と Frechet 微分についての説明を始めます。まずは第1章に出てきた関数の極値条件から。

2.1　関数の極値条件

実数値関数

$$\phi : \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

が $h = h_0$ で極小（極大）であるとは，h_0 を含むある開区間

$$\Omega = (h_0 - \epsilon, h_0 + \epsilon) \quad \epsilon > 0$$

が存在してこの Ω 上では全ての $h \in \Omega$ 対して

$$\phi(h_0) \le \phi(h) \text{ (極小の場合)} \qquad \phi(h) \le \phi(h_0) \text{ (極大の場合)}$$

が成立つことを言います。要するに h_0 の近傍で最小（または最大）であるという意味です。
ここで関数

$$\phi : \quad \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

が $h = h_0$ で微分可能ならば以下の必要条件が成立ちます。

補題 2.1.1 $\phi(h)$ が $h = h_0$ で微分可能かつ極小 *(*極大*)* ならば

$$\frac{d\phi(h)}{dh}(h_0) = 0. \tag{2.1}$$

(証明)　$\phi(h)$ は $h = 0$ で極小であるとすると：(極大の場合も全く同じ)
$\phi(h)$ が $h = h_0$ で微分可能であるとは次の極限値

$$\lim_{h \to h_0} \frac{\phi(h) - \phi(h_0)}{h - h_0} \tag{2.2}$$

が存在することでした。そしてこの極限値を

$$\frac{d\phi(h)}{dh}(h_0)$$

で表しました。
h の h_0 への近づき方は右から $(h_0 < h)$ でも左から $(h < h_0)$ でもよく，2つの極限値

$$\lim_{h \to h_0, h > h_0} \frac{\phi(h) - \phi(h_0)}{h - h_0} \tag{2.3}$$

$$\lim_{h \to h_0, h < h_0} \frac{\phi(h) - \phi(h_0)}{h - h_0} \tag{2.4}$$

の何れもが存在しこれらは (2.2) 式に一致する。
さて h_0 の右側で十分近い $h_0 < h$ をとると，

$$h - h_0 > 0$$

であり，かつ，極小の条件から

$$\phi(h) - \phi(h_0) \geq 0$$

です。従って，

$$\frac{\phi(h_0) - \phi(h)}{h_0 - h} \leq 0$$

であり，この式 h について

$$h \to h_0 \quad (h_0 < h)$$

とすれば，

$$\lim_{h \to h_0, h > h_0} \frac{\phi(h) - \phi(h_0)}{h - h_0} \quad \geq 0$$

が得らます。この極限値は (2.2) 式に一致したので，

$$\frac{d\phi(h)}{dh}(h_0) = \lim_{h \to h_0, h < h_0} \frac{\phi(h) - \phi(h_0)}{h - h_0} \geq 0 \tag{2.5}$$

　同様に今度は反対側の左から h_0 の左側で十分近い $h < h_0$ をとると，

$$h - h_0 < 0$$

$$\phi(h) - \phi(h_0) \geq 0$$

から

$$\frac{\phi(h_0) - \phi(h)}{h_0 - h} \leq 0$$

であり，この式 h について

$$h \to h_0 \quad (h < h_0)$$

とすれば,

$$\lim_{h \to h_0, h > h_0} \frac{\phi(h) - \phi(h_0)}{h - h_0} \quad \leq 0$$

が得られます。この極限値は (2.2) 式に一致するので,

$$\frac{d\phi(h)}{dh}(h_0) = \lim_{h \to h_0, h < h_0} \frac{\phi(h) - \phi(h_0)}{h - h_0} \leq 0 \tag{2.6}$$

結局，(2.5),(2.6) 式から

$$\frac{d\phi(h)}{dh}(h_0) = \lim_{h \to h_0,} \frac{\phi(h) - \phi(h_0)}{h - h_0} = 0$$

∎

2.2 変分問題

変分法の典型的な問題は，第 1 章でも述べましたが
原点 $(0,0)$ **と点** $(1,1)$ **を通りその長さが最小になるような線分** $(x, f(x)), x \in [0,1]$ **を与える関数** $f(x)$ **を求めよ**
といった問題です。問題の関数 $f(x)$ を区間 $[0,1]$ の各点 x で微分可能でその微分係数が x について連続な関数の仲間から探すとすれば，この問題は，$f(x)$ による線分の長さが

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \tag{2.7}$$

で与えられるので，この積分式を $L(f)$ で表し，これを f が原点 $(0,0)$ と $(1,0)$ を通るという条件

$$f(0) = 0, f(1) = 1$$

のもとに最小にする

$$f \in C^1[0,1]$$

を求めよ。と記述されます。ここで,

$$C^1[0,1]$$

は区間 $[0,1]$ 上で連続微分可能な関数の全体の集合を表します。

$C^1[0,1]=\{f|f:[0,1]$ から $\mathbf{R}$ へ関数, かつ, $f:[0,1]$ 上で微分可能な関数, その導関数 $x\in[0,1]\mapsto f'(x)$ が x について連続。$\}$

以後，この問題を解いていきますが，$C^1[0,1]$ のような集合を関数空間と呼び，$L(f)$ のように，関数空間の要素である関数 f に実数値を対応させるものを汎関数とよびます。上の問題では汎関数

$$L:f\in C^1[0,1]\mapsto L(f)=\int_0^1\sqrt{1+(f'(x))^2}dx\in\mathbf{R}$$

が定義されています。
変分法は汎関数の最大, 最小問題です。

見通しを良くするため，先ず以下の問題を解いてみます。
変分問題その１ 汎関数

$$L(f)=\int_0^1(f'(x))^2\,dx$$

を境界条件 $f(0)=0,f(1)=1$ のもとに最小にする $f\in C^1[0,1]$ を求めよ。

[**解法**] $L(f)$ は $f=f_0\in C^1[0,1]$ で最小と仮定します。
ここで

$$g\in C^1[0,1]\,,\ g(0)=0\,,\ g(1)=1$$

となる任意の g をとり，

$$\Delta f(x)=g(x)-f_0(x)$$

とおくと，
$\Delta f\in C^1[0,1],\Delta f(0)=\Delta f(1)=0$ となります。
$h\in R$ をとり

$$f_h(x)=f_0(x)+h\Delta f(x)$$

とします。
$h=0$ のとき $f_h(x)=f_0(x)$ となります。
ここで $L(f_h)$ を

$$P(h)=L(f_h)=\int_0^1(f_h'(x))^2\,dx$$

とおきます。$P(h)$ は $h=0$ で最小である。そこで補題 2.1.1 を適用します。

注意しなければならないのは, 補題の条件は, 極小値や極大値を与える必要条件ということです。その条件を充たすものを求めたとしても,「必要条件」を充たす「候補」で, それが,「最小（最大）」かどうかは別途調べる必要があります。

この補題 2.1.1 を適用するため, P の $h=0$ における微分可能性を示し,

$$\frac{dP}{dh}(0)$$

を求めることにします。

まず

$$\begin{aligned} P(h) &= L(f_h)=\int_0^1 \left(f_h'(x)\right)^2\, dx \\ &= \int_0^1 \left\{\frac{d}{dx}(f_0(x)+h\Delta f(x))\right\}^2\, dx \\ &= \int_0^1 (f_0'(x)+h\Delta f'(x))^2\, dx \end{aligned}$$

であることに注意します。

$$\frac{dP}{dh}(0)$$

の定義は

$$\frac{d}{dh}P(0)=\lim_{h\to 0}\frac{P(h)-P(0)}{h}$$

です。右辺を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{P(h)-P(0)}{h} &= \frac{\int_0^1 (f_0'(x)+h\Delta f'(x))^2\, dx-\int_0^1 (f_0'(x))^2\, dx}{h} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{h}\{(f_0'(x)+h\Delta f'(x))^2-(f_0'(x))^2\}\, dx \\ &= \int_0^1 \{2f_0'(x)\Delta f'(x)+h(\Delta f'(x))^2\}\, dx \\ &= 2\int_0^1 \{f_0'(x)\Delta f'(x)\}\, dx+h\int_0^1 \{(\Delta f'(x))^2\}\, dx \end{aligned}$$

となります。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh}P(0) &= \lim_{h\to 0} 2\int_0^1 \{f_0'(x)\Delta f'(x)\}\, dx+h\int_0^1 \{(\Delta f'(x))^2\}\, dx \\ &= 2\int_0^1 \{f_0'(x)\Delta f'(x)\}\, dx \qquad (2.8) \end{aligned}$$

ここで

[**ハールの補題の適用**]

補題により P が $h=0$ で 微分可能で極小値をとるから

$$\frac{dP}{dh}(0)=0$$

.

すなわち

$$\int_0^1 \Delta f'(x) f_0'(x)\,dx=0$$

となります。次に ハールの補題を適用します。ハールの補題には幾通り

かのものがありますが，ここではその一つを挙げます。

補題 2.2.1 (ハールの補題) η が $[x_1,x_2]$ 上で連続で，$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$ となるすべての $\varphi\in C^1[x_1,x_2]$ に対して

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d\varphi}{dx}(x)\,dx=0$$

を満たすならば,

ある定数 ω が存在し

$$\eta(x)\equiv\omega,\quad x\in[x_1,x_2]$$

(証明)

$$\omega=\frac{\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)dx}{x_2-x_1}$$

とおくと,

$$\int_{x_1}^{x_2}[\eta(x)-\omega]dx=0$$

です。ここで,

$$\varphi(x)=\int_{x_1}^{x}[\eta(s)-\omega]ds$$

とおくと,

$$\frac{d\varphi}{dx}(x)=\eta(x)-\omega$$

で

$$\varphi(x_1)=\int_{x_1}^{x_1}[\eta(x)-\omega]dx=0,\quad \varphi(x_2)=\int_{x_1}^{x_2}[\eta(x)-\omega]dx=0$$

です。補題の仮定から，

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}[\eta(x)-\omega]^2dx &= \int_{x_1}^{x_2}[\eta(x)-\omega]\frac{d\varphi}{dx}(x)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d\varphi}{dx}(x)\,dx-\omega[\varphi(x_2)-\varphi(x_1)]=0\end{aligned}$$

従って

$$\eta(x)-\omega\equiv 0,\quad x\in[x_1,x_2]$$

∎

これを用いて $\Delta f(x)\in C^1[0,1]$ は任意かつ，
$\Delta f(0)=0$, $\Delta f(1)=0$ なのである定数 C_1 が存在して，

$$f_0'(x)\equiv C_1$$

よって

$$f_0(x)=C_1x+C_2\quad(C_2:\text{定数})$$

境界条件 $f_0(0)=0,\quad f_0(1)=1$ より

$$C_1=1,\quad C_2=0$$

故に

$$f_0(x)=x$$

2.3 変分問題 2

さて，始めに挙げた線分の長さを最小にする問題に戻りましょう。再度，書けば， **問題** 汎関数

$$L(f)=\int_0^1\sqrt{1+(f'(x))^2}dx \tag{2.9}$$

を境界条件

$$f(0)=0,\ f(1)=1$$

のもとに最小にする $f\in C^1[0,1]$ を求めよ。

[解法]
$L(f)$ は $f=f_0\in C^1[0,1]$ で最小と仮定します。$f_0(0)=0$，$f_0(1)=1$

$g \in C^1[0,1]$, $g(0)=0$, $g(1)=1$ となる任意の g をとります。$\Delta f(x) = g(x) - f_0(x)$ とおくと，

$$\begin{array}{ll} \Delta f \in C^2[0,1]\,, & \Delta f(0) = g(0) - f_0(0) = 0 \\ & \Delta f(1) = g(1) - f_0(1) = 0 \end{array} \tag{2.10}$$

となります。

$h \in$
bfR をとり $f_h(x) = f_0(x) + h\Delta f(x)$ とします。$h=0$ のとき $f_h(x) = f_0(x)$ となります。

ここで $L(f_h)$ を

$$P(h) = L(f_h) = \int_0^1 \sqrt{1 + (f_h'(x))^2}dx$$

とおきます。$P(h)$ は $h=0$ で $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+(f_0'(x))^2}dx$ となるから最小です。そこでと問題その 1 と同様にして補題 1.1.1 を適用します。

補題 2.1.1(再述) $P(h)$ が $h=0$ で微分可能かつ極小ならば

$$\frac{dP}{dh}(0) = 0. \tag{2.11}$$

(証明済)

この補題を適用するため，P の $h=0$ における微分可能性を示し $\frac{dP}{dh}(0)$ を求めることにします。

まず，

$$\begin{aligned} P(h) &= L(f_h) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{df_h(x)}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left\{\frac{d}{dx}(f_0(x) + h\Delta f(x))\right\}^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + (f_0'(x) + h\Delta f'(x))^2}\, dx \end{aligned}$$

と変形します。

ところで，$\frac{dP}{dh}(0)$ の定義は

$$\frac{d}{dh}P(0) = \lim_{h\to 0} \frac{P(h) - P(0)}{h} \tag{2.12}$$

でした。基本的には問題 1 と同様な計算過程を経て

$$
\begin{aligned}
&((2.12)\text{ の右辺}) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^1 \sqrt{1+(f_0'(x)+h\Delta f'(x))^2}\,dx - \int_0^1 \sqrt{1+(f_0'(x))^2}\,dx}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \int_0^1 \frac{1}{h} \left\{ \sqrt{1+(f_0'(x)+h\Delta f'(x))^2} - \sqrt{1+(f_0'(x))^2} \right\} dx \\
&= \int_0^1 \frac{f_0'(x)\Delta f'(x)}{\sqrt{1+(f_0'(x))^2}} dx \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

を得ます。

式 (2.13) 導出　式の展開を見やすくするため

$$
\begin{aligned}
Q(x,h) &= \sqrt{1+(f_0'(x)+h\Delta f'(x))^2} \\
S(x,h) &= \frac{Q_x(h)-Q_x(0)}{h}
\end{aligned}
$$

とおきます。

各 $x \in [0,1]$ について

$$
S_0(x) = \lim_{hto0} S(x,h)
$$

を計算すれば

$$
\begin{aligned}
\lim_{hto0} S(x,h) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \{Q(x,h)-Q(x,0)\} \\
&= \frac{\partial Q}{\partial h}(x,0) \\
&= \frac{f_0'(x)\Delta f'(x)}{\sqrt{1+(f_0'(x))^2}}
\end{aligned}
$$

となります。

式 (2.13) では，極限記号と積分の記号の交換

$$
\lim_{h\to 0} \int_0^1 S(x,h)dx = \int_0^1 \lim_{h\to 0} S(x,h)dx
$$

が行われます。

このようなことは可能でしょうか?「問題その１」の場合は h が単純に積分記号の外側に出ていました。それでこんな心配は要らなかったわけです。

そこで，極限記号と積分記号の交換について調べてみます。これも学部１年次の微積分の講義で習った**「一様収束」**の復習です。

目標は $h \to 0$ のとき $S(x,h)$ が $S_0(x) = \lim_{h\to 0} S(x,h)$ に区間 $[0,1]$ 上で一様収束することを示すことです。
この一様収束とは，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して，その ε のみ依存して決まるある正数 $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，

$$|h| < \delta(\varepsilon)$$

ならば 区間 $[0,1]$ 上の任意の $x \in [0,1]$ に対して

$$|S(x,h) - S_0(x)| < \varepsilon$$

が成立つことです。

$S(x,h)$ が $h \to 0$ のとき x に関し一様に $S_0(x)$ に近づくことを意味します。
このとき，$|h| < \delta(\varepsilon)$ ならば，

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 S(x,h)dx - \int_0^1 S_0(x)dx\right| &= \left|\int_0^1 \{S(x,h)dx - S_0(x)\}dx\right| \\ &\le \int_0^1 |S(x,h) - S_0(x)|dx \\ &< \int_0^1 \varepsilon dx = \varepsilon \end{aligned}$$

という評価式が得られ，結局

$$\int_0^1 S(x,h)dx \to \int_0^1 S_0(x)dx \quad (h \to 0).$$

すなわち，

$$\lim_{h\to 0}\int_0^1 S(x,h)dx = \int_0^1 \lim_{h\to 0} S(x,h)dx$$

が成立ちます。

さて，一様収束性に証明にとりかかりましょう。先ず，$x \in [0,1]$ を固定した

$$s \in [0,h] \mapsto Q(x,s)$$

は $[0,h]$ 上の連続微分可能な関数であり， $(0,h)$ で 2 回微分可能です。

$Q(x,h)$ を h について 2 次のテイラー展開をすると

$$\begin{aligned} &Q(x,h) = Q(x,0) + \frac{\frac{\partial Q}{\partial h}(x,0)}{1!}(h-0) + R_2(x,h) \\ &= Q(x,0) + \frac{\partial Q}{\partial h}(x,0)h + R_2(x,h) \end{aligned}$$

ただし，$R_2(x,h)$ は

$$R_2(x,h)=(Q(x,h)-Q(x,0))-\frac{\partial Q}{\partial h}(x,0)h$$

で定義されます。また $h\neq 0$ に対して，

$$\left|\frac{Q(x,h)-Q(x,0)}{h}-\frac{\partial Q}{\partial h}(x,0)\right|=\left|\frac{R_2(x,h)}{h}\right| \tag{2.14}$$

が成立っています。
各項を計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial h}(x,h)&=\frac{(f_0'(x)+h\Delta f'(x))\Delta f'(x)}{\sqrt{1+(f_0(x)+h\Delta f'(x))^2}}\\ \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 h}(x,h)&=\frac{(\Delta f'(x))^2}{\{1+(f_0'(x)+h\Delta f'(x))^2\}^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

ですから，

$$\begin{aligned}Q(x,0)&=\sqrt{1+(f_0'(x))^2}\\ \frac{\partial Q}{\partial h}(x,0)&=\frac{f_0'(x)\Delta f'(x)}{\sqrt{1+(f_0'(x))^2}}\end{aligned}$$

であり，$x\in[0,1]$ に依存したある $c \quad (|c|\leq|h|)$ が存在して

$$\begin{aligned}R_2(x,h)&=\frac{\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 h}(x,c)}{2!}(h-0)^2=\frac{\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 h}(x,c)}{2}h^2\\ &=\frac{(\Delta f'(x))^2h^2}{2\{1+(f_0'(x)+c\Delta f'(x))^2\}^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{2.15}$$

$|c|$ の大きさは x に依存していますが，$|c|\leq|h|$ で抑えれれています。
　既に述べたように，

$$\begin{aligned}S(x,h)&=\frac{Q(x,h)-Q(x,0)}{h}\\ S_0(x)&=\frac{\partial Q}{\partial h}(x,0)\end{aligned}$$

でした。
　(2.14) より，

$$|S(h,x)-S_0(x)|=\left|\frac{R_2(x,h)}{h}\right|$$

　$|h|\leq 1$ としても一般性を失わないので，$|h|\leq 1$ とします。(2.15) より，

$R_2(x,h)$ は (x,h) について連続です。(x,h) は有界な領域 $[0,1]\times[-1,1]$ 上を動くものとしてよいから，ある正数 $K\geq 0$ が存在して，任意の $x\in[0,1]$ と $h\neq 0$ に対して

$$\left|\frac{R_2(x,h)}{h}\right| < K|h| \tag{2.16}$$

が得られます。(2.5 節の補足で証明します。)
そこで，

$$\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{K}$$

とおきます。

$$|h|<\delta(\varepsilon)$$

ならば，任意の $x\in[0,1]$ に対して，

$$\left|\frac{R_2(x,h)}{h}\right| < K|h| < K\delta(\varepsilon)=\varepsilon$$

よって， $S(x,h)$ は $h\to 0$ のとき x に関し一様に $S_0(x)$ に収束します。
既に述べたが $|h|<\delta(\varepsilon)$ ならば，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 S(x,h)dx-\int_0^1 S_0(x)dx\right| &= \left|\int_0^1\{S(x,h)dx-S_0(x)\}dx\right|\\ &\leq \int_0^1 |S(x,h)-S_0(x)|dx\\ &< \int_0^1 \varepsilon dx=\varepsilon\end{aligned}$$

すなわち，

$$\lim_{h\to 0}\int_0^1 S(x,h)dx=\int_0^1 \lim_{h\to 0}S(x,h)dx$$

∎

以上より，

$$\left[\frac{dP(h)}{dh}\right]_{h=0}=\int_0^1\frac{f_0'(x)\Delta f'(x)}{\sqrt{1+(f_0'(x))^2}}dx \tag{2.17}$$

$P(h)$ は $h=0$ で微分可能で極小値をもつから，補題 2.1.1 より

$$\int_0^1\left(\frac{f_0'(x)}{\sqrt{1+(f_0'(x))^2}}\right)\Delta f'(x)\,dx=0 \tag{2.18}$$

これに問題 1 と同様に以下のハールの補題を適用します。

補題 2.2.1(ハールの補題：再述)

η が $[x_1, x_2]$ 上で連続で，$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ となるすべての $\varphi \in C^1[x_1, x_2]$ に対して

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d\varphi}{dx}(x)\, dx = 0$$

を満たすならば，
ある定数 ω が存在し

$$\eta(x) \equiv \omega, \quad x \in [x_1, x_2]$$

(証明済)

これを用いると，(2.18) において $\Delta f(x) \in C^1[0,1]$ は任意で，$\Delta f(0) = \Delta f(1) = 0$ ゆえ，ある定数 c が存在して，

$$\frac{f_0'(x)}{\sqrt{1 + (f_0'(x))^2}} = c \quad (c : \text{定数})$$

これから

$$f_0'(x) = c\sqrt{1 + (f_0'(x))^2}$$
$$(f_0'(x))^2 = c^2(1 + (f_0'(x))^2)$$
$$f_0'(x) = \frac{\pm c}{1 - c^2}$$

$\dfrac{\pm c}{1 - c^2} = A$ と置くと，

$$f_0'(x) = A$$
$$f_0(x) = Ax$$

$f_0(0) = 0, f_0(1) = 1$ より

$$f_0(x) = x \tag{2.19}$$

2.4 補足 1：少し神経質なお話

この例では $S(x,h)$ が $h \to 0$ のとき x に関し一様に $S_0(x)$ に収束することから極限記号と積分記号の交換が可能で

$$\lim_{h \to 0} \int_0^1 S(x,h)dx = \int_0^1 \lim_{h \to 0} S(x,h)dx$$

となりましたが，収束が一様でない場合は注意を要します。
以下の例の様に極限記号と積分記号の交換できない場合もあります。
再び，微積分の復習になります，

$S(x,h)$ が $h \to 0$ のとき $S_0(x)$ に各点収束するとは
任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して，その ε と x の両方に依存して決まるある正数 $\delta(\varepsilon,x) > 0$ が存在して，

$$|h| < \delta(\varepsilon,x)$$

ならば

$$|S(x,h) - S_0(x)| < \varepsilon$$

が成立つことです。
$\delta(\varepsilon,x)$ が ε と x の両方に依存してきまると，以下のように，一様収束の場合と様子が違ってきます。

x について各点収束する関数の例として $S(x,h)$ を

$$S(x,h) = \frac{x}{h}\exp^{-\frac{x^2}{h}} \quad x \in [0,1]$$

で定義します。

まず，$h \to 0$ のときの

$$\lim_{h\to 0} S(x,h)$$

を調べておきます。
$x = 0$ のときは $S(0,h) = 0$ となるので

$$\lim_{h\to 0} S(h,0) = 0$$

です。それ以外の $x \in (0,1]$ では

$$\lim_{h\to 0} S(x,h) = \lim_{h\to 0} \frac{x}{h}\exp^{-\frac{x^2}{h}} = 0$$

定義から

$$S(x,0) = 0, x \in [0,1]$$

ですので,
$h \to 0$ のとき

$$\lim_{h\to 0} S(x,h) = S(x,0), x \in [0,1](\text{ただし, 各点の収束})$$

さて, この例では極限記号と積分記号の交換は可能でしょうか？

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_0^1 S(x,h)\,dx &= \lim_{h\to 0}\int_0^1 \frac{x}{h}\exp^{-\frac{x^2}{h}}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

しかし一方

$$\int_0^1 S_0(x)dx = 0$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0}\int_0^1 S(x,h)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{h\to 0} S(x,h)\,dx$$

上の式のように困った事態になるのは関数 $S(x,h)$ が一様収束しないからです。一様収束するには以下の条件が必要です。

$$\lim_{h\to 0}\max_{0\le x\le 1}|S(x,h)-S_0(x)| = 0$$

そこで $|S(x,h)-S_0(x)| = |S(x,h)|$ の最大値を調べてみます。

$$\frac{dS(h,x)}{dh} = \frac{1}{h}\exp^{-\frac{x^2}{h}}(1-2\frac{x^2}{h}) = 0$$

となるのは

$$x = \sqrt{\frac{h}{2}}$$

のときで，最大値は

$$S(h,\sqrt{\frac{h}{2}}) = \sqrt{\frac{1}{2h\exp}}$$

となり，結局,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\max_{0\le x\le 1}|S(x,h)-f(x)| &= \lim_{h\to 0}\max_{0\le x\le 1}|S(x,h)| \\ &= \lim_{h\to 0}\sqrt{\frac{1}{2h\exp}} \\ &= \infty\end{aligned}$$

というように $h\to 0$ のとき無限大に発散してしまいます。
従って関数列 $S(x,h)$ は一様収束しません。

2.5 補足 2

ところで，　(2.3) がいえるためには,

$$\rho(x,c) = \frac{(\Delta f'(x))^2}{2\{1+(f_0'(x)+c\Delta f'(x))^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

と置いたとき，ある正数 $K > 0$ が存在して，任意の

$$(x, c) \in [0,1] \times [-1,1]$$

に対して

$$|\rho(x,c)| < K \tag{2.20}$$

が言えればよいことになります。
これも再び，微積分の復習になりますが，以下の定理を使います。

定理 2.5.1 X を
bfR^2 の有界閉集合，ρ を X 上の連続関数とするとき， ρ は X で最大値，最小値をとる。すなわち，$\rho(X)$ は最大値，および最小値をもつ。

先ずこの定理を用いて (2.20) を示しておきましょう。
((2.20) の証明) $[0,1] \times [-1,1] \in$
bfR^2 は有界閉集合です。
$f_0 \in C^2[0,1]$, $\Delta f \in C^2[0,1]$ であるから，

$$f_0' \in C^1[0,1] \subset C[0,1],\ \Delta f' \in C^1[0,1] \subset C[0,1]$$

. さらに， $0 < |c| < |h|$ であり， 分母が 0 になることはなく，

$$\rho \in C[0,1] \times [-1,1]$$

. 以上から，定理より ρ は

$$(x, c) \in [0,1] \times [-1,1]$$

で最大値 $M = \max \rho(x,c)$，最小値 $m = \min \rho(x,c)$ を持ちます。よって，$K > \max(|M|, |m|)$ となるような K が存在します。 ∎

さて上の定理を順を追って証明しよう。

集積点と閉集合の定義は以下の通りです。

定義 2.5.1 $X \subset$
bfR^2 とする。

1. (x_0, c_0) が集積点であるとは， X の元からなる点列 $\{(x_n, c_n)\}$ で，$(x_n, c_n) \neq (x_0, c_0)$
$\lim_{n \to \infty} (x_n, c_n) = (x_0, c_0)$ となるものが存在するときにいう。

2. X の集積点がすべて X の元であるとき，X を閉集合という。

大抵の解析学の教科書には載っていますが,$Bolzano - Weirstraus$ の定理を証明しておきます。

定理 2.5.2 (Bolzano-Weirstraus)　点列 $\{(x_n, c_n)\}$ が有界であれば, その中から収束する部分列を取り出すことができる。

(区間縮小法による証明)
[区間縮小の原理]

実数の単調増加列 $\{p_k\}$ と単調減少列 $\{q_k \quad\}$ により　区間の列 $[p_k, q_k]$ を構成し，その区間の長さが

$$|q_{(k+1)} - p_{(k+1)}| \leq \frac{1}{2}|q_k - p_k| \quad k = 1, 2, \cdots$$

のように縮小すると, $\{p_k\}$,$\{q_k\}$ の極限

$$\lim_{k\to\infty} p_k = \alpha,\ \lim_{k\to\infty} q_k = \beta$$

が存在して

$$\alpha = \beta$$

となります。これを用いて定理を証明します。

まず, 有界な数列 $\{x_n\}$ から収束する部分列をとりだすことができることを示します。
数列 $\{x_n\}$ が有界ならば,

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |x_n| \leq L$$

となる L が存在します。
$\{x_n\}$ の中に同じ数が無限回現れるときは，その番号を次々に取り出して $x_{n_1} = x_{n_2} = x_{n_3} = \cdots$ とできます。
$\{x_{n_k}\}$ は明らかに収束列です。したがって，はじめから $\{x_n\}$ の中には相異なる数が無限個存在するとして良いわけです。

そうしておくと，区間 $[-L, 0]$, $[0, L]$ のうち少なくとも一方は $\{x_n\}$ の(相異なる) 元を無限個含みます。

それを A_1 とおきます。

$$A_1 = [p_1, q_1]$$

に含まれる $\{x_n\}$ の元を一つ取って，それを $\{x_{n_1}\}$ といいます。

次に，A_1 を二つの部分

$$\left[p_1, \frac{p_1+q_1}{2}\right],\ \left[\frac{p_1+q_1}{2}, q_1\right]$$

に分けると，少なくとも一方は $\{x_n\}$ の元を無限個含むことになります。

それを

$$A_2 = [p_2, q_2]$$

とおきます。
A_2 に含まれる $\{x_n\}$ の元で n_1 より大きい番号のものを一つ取りだし，それを $\{x_{n_2}\}$ とします。
A_2 を二つの部分

$$\left[p_2, \frac{p_2+q_2}{2}\right],\ \left[\frac{p_2+q_2}{2}, q_2\right]$$

に分けます。

以下同様の手続きを繰り返します。
これを続けることにより，次のような閉区間の列 $\{A_k\}$ と $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ を作ることができます。

1. $A_k = [p_k, q_k]$ とおくと，$\{p_k\}$ は単調増加列，$\{q_k\}$ は単調減少列で $q_k - p_k = \dfrac{L}{2^{k-1}}$
2. $x_{n_k} \in A_k$，すなわち $p_k \leq x_{n_k} \leq q_k$

実数の有界な単調列は収束しますから，

$$\lim_{k\to\infty} p_k = \alpha,\ \lim_{k\to\infty} q_k = \beta$$

が存在します。
上の 1. より

$$\alpha = \beta$$

です。

2. より

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha = \beta$$

を得ます。

さて, 実数列 $\{x_n\}$, $\{c_n\}$ は有界でしたから, まず 上の議論により, $\{x_n\}$ から収束する部分列が取り出せます。
それを $\{x_{n_k}\}$ で表し

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$$

とおきます。
次に，全く同様に $\{c_{n_k}\}$ も有界ですから収束する部分列が取り出せるので，それを $\{c_{n_l}\}$ であらわし，

$$\lim_{l\to\infty} c_{n_l} = c_0$$

とおきます。

すると

$$\{n\} \supset \{n_k\} \supset \{n_l\}$$

となります。

(x_{n_l}, c_{n_l}) は (x_n, c_n) の部分列であって，

$$x_{n_l} \to x_0,\ c_{n_l} \to c_0$$

です。よって，

$$\lim_{l\to\infty} (x_{n_l}, c_{n_l}) = (x_0, c_0)$$

です。 ∎

集合論の WEB 教材でも説明しましたが，

定義 2.5.2　実数の集合の部分集合 $Y \subset \mathbf{R}$ について，以下の条件を満たす y_0 を Y の上限といい，$\sup Y$ と書きます。

1. $\forall y \in Y$ に対して，$y \leq y_0$
2. $\forall \varepsilon > 0$ に対して，$y_0 - \varepsilon < y_\varepsilon$ となる $\exists y_\varepsilon \in Y$ が存在する。

以上の準備の下に，

定理 2.5.3 X を $\mathbf{R^2}$ の有界閉集合，ρ を X 上の連続関数とする。このとき，ρ は X で最大値，最小値をとる。すなわち，$\rho(X)$ は最大値，および最小値をもつ。

(証明) まず $\rho(X)$ は有界です。実際，$\rho(X)$ が有界でなかったとすると，

$$(x_n, c_n) \in X,\ |\rho(x_n, c_n)| > n, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{2.21}$$

となる数列 $\{(x_n, c_n)\}$ がとれます。

X は有界閉集合ですから，,$Bolzano - Weirstraus$ の定理によって $\{(x_n, c_n)\}$ は収束する部分列を含み，かつその極限値もまた X に属します。

その一つを $\{(x_{n_k}, c_{n_k})\}$ とおき，

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}, c_{n_k}) = (x_0, c_0) \in X$$

とおくと,ρ の連続性より

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x_{n_k}, c_{n_k}) = \rho(x_0, c_0)$$

.

ところが一方，(2.21) より，

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x_{n_k}, c_{n_k}) = \infty$$

. が成り立っていてこれは矛盾です。

さて以上によって $\rho(X)$ は有界でしたから，

$$M = \sup\rho(X),\ m = \inf\rho(X)$$

となる $M, m \in$
bfR があります。
この M, m が $M = \max\rho(X),\ m = \min\rho(X)$ となることを示しましょう。

まず，上限の定義から

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, c_n) = M$$

となるような X の元からなる数列 $\{(x_n, c_n)\}$ がとれます。
この列はに収束しますから, 有界です。
そこで,$Bolzano - Weirstraus$ の定理によって $\{(x_n, c_n)\}$ から収束する部分列 $\{(x_{n_k}, c_{n_k})\}$ をとりだし,

$$\lim_{k \to \infty} (x_{n_k}, c_{n_k}) = (x_0, c_0)$$

とすると，$(x_0, c_0) \in X$ であり ρ の連続性から

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x_{n_k}, c_{n_k}) = \rho(x_0, c_0)$$

となります。ゆえに，$M = \rho(x_0, c_0)$. よって M は最大値です。最小値の場合も同様です。

$\blacksquare$