最適化理論-変分法と$Fréchet$微分その２-

師玉康成

目 次

第1章　関数空間

再び最初に扱った変分問題に戻りましょう。それは汎関数

$$f \in C^1[0,1] \mapsto \ J(f) = \int_0^1 \{f'(x)\}^2 dx$$

を条件

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1$$

で最小化 (極小化) するものでした。

解法の手順は，まず，$\bar{f}$ がこの問題の極小解を与えるものとして，

$$g \in C^1[0,1],\ g(0) = 0,\ g(1) = 1$$

を任意に選び，

$$\Delta f(x) = g(x) - \bar{f}(x)$$

とおくと

$$\Delta f(x) \in C^1[0,1],\ \Delta f(0) = \Delta f(1) = 0$$

であり，

$$f(x) = \bar{f}(x) + h\Delta f(x),\ h \in \mathbf{R},\ \mathbf{f} \in \mathbf{C^1[0,1]}$$

として，

$$J(h) = J(f) = \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dh}(\bar{f}(x) + h\Delta f(x)) \right\}^2 dx$$

とすると，実数値関数

$$J \ : \ \mathbf{R} \ \to \ \mathbf{R}$$

が定義され $J(h)$ は $h = 0$ で 極小になりました。これから

$$\left.\frac{dJ(h)}{dh}\right|_{h=0} = 2\int_0^1 \bar{f}'(x)\Delta f'(x) dx$$

得て，ハールの補題を適用した。

これは $g \in C^1[0,1]$ を介在させて，

$$\Delta f(x)$$

に沿った，$J(f+h\Delta f)$ の $J(f)$ からの変動を計算したことになります。

ここで，関数の集合

$$E = \{f \in C^1[0,1],\ f(0)=0,\ f(1)=1\}$$

から $\mathbf{R}$ への写像

$$J\ :\ E \to \mathbf{R}$$

について何らかの意味の微分の概念を導入し実数値関数の極小条件

$$\left.\frac{dJ(f)}{df}\right|_{f=\bar{f}} = 0$$

のような扱いはできないものでしょうか？
よく知られるように実数値関数

$$\varphi\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

の $x=\bar{x}$ での $\varphi'(\bar{x})$ は

$$\varphi'(\bar{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi'(\bar{x}+h)-\varphi(\bar{x})}{h}$$

で定義されています。
これと同様な考えかたと定義を関数の集合 E 上の関数 $J(f),\quad f \in E$ に持ち込もうというのです。
E の要素間に一演算や極限操作を行うための距離一など実数の集合 $\mathbf{R}$ やそれから作られる n 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R^n}$ と同じような性質が定義されている必要があるでしょう。

1.1　ノルム線形空間

1.1.1　線形空間

ここで, 集合 $\mathbf{R}$ やそれから作られる n 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R^n}$ について復習してみます。

$\mathbf{R}$ についてはそれらの要素の間に加算と乗法が定義され以下が成り立っていました。

任意の $x, y \in \mathbf{R}$ について $x + y = y + x$
任意の $x, y, z \in \mathbf{R}$ について $(x + y) + z = x + (y + z)$
任意の $x, y \in \mathbf{R}$ について $xy = yx$
任意の $x, y, z \in \mathbf{R}$ について $(xy)z = x(yz)$
$0 \in \mathbf{R}$ と任意 $x \in \mathbf{R}$ について $x + 0 = x$
$1 \in \mathbf{R}$ と任意の $x \in \mathbf{R^n}$について $1x = x$
任意 $x \in \mathbf{R}$ について $(-x) \in \mathbf{R}$ が存在して $x + (-x) = 0$
任意 $x \in \mathbf{R}, x \neq 0$ について $x^(- 1) \in \mathbf{R}$ が存在して $x + x^(- 1) = 1$
任意の$\alpha \in \mathbf{R}$ と任意の $x, y \in \mathbf{R}$ について$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
任意の$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ と任意の $x \in \mathbf{R}$ について $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
任意の$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ と任意の $x \in \mathbf{R}(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

$\mathbf{R^n}$ についても $\mathbf{R}$ のように要素間に加法が定義されていました。$\mathbf{R}$ のように要素の間の乗法は定義されませんが,$\mathbf{R}$ との $\mathbf{R^n}$ の乗法が定義され,以下が成り立っていました。

$\mathbf{R^n}$ の要素

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R^n}$$

の加算は

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \cdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

で定義され,$\mathbf{R}$ との $\mathbf{R^n}$ の乗法は

$$\alpha \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \cdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

で定義されていました。さらに $\mathbf{0} \in \mathbf{R^n}$ と $-\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$ は

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \dots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

で定義され以下が成り立っていました。

任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R^n}$ について $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R^n}$ について $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

$\mathbf{0} \in \mathbf{R^n}$ と任意 $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$ について $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$

任意 $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$ について $-\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$ が存在して $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n} \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

任意の $\alpha \in \mathbf{R}$ と任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R^n}$ について $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

任意の $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ と任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$ について $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

任意の $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ と任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n} (\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$

$1 \in \mathbf{R}$ と任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$ について $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

これら性質はの性質が一般化されたものと言えます。$\mathbf{R^n}$ は $\mathbf{R}$ 上の線形空間であると呼ばれます。さらに一般化すると, 集合 $\mathbf{V}$ の要素の間に加算と,$\mathbf{R}$ との乗法が定義され以下が成り立っていいる場合 $\mathbf{V}$ は $\mathbf{R}$ 上の線形空間であると呼ばれます。

任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ について $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$ について $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

$\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ と任意 $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ について $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$

任意 $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ について $-\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ が存在して $\mathbf{x} \in \mathbf{V}\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$

任意の $\alpha \in \mathbf{V}$ と任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ について $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

任意の $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ と任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ について $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

任意の $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ と任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{V}(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$

$1 \in \mathbf{R}$ と任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ について $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

さて, 線形空間は数ベクトル空間に限りません。関数の集合もベクトル空間になります。ここで調べようとしている関数の集合 E も同様な数学的な構造をもっています。まず,

$$\mathcal{F}([0,1],\mathbf{R}) = \{f|f:[0,1] \text{ から } \mathbf{R} \text{ への関数 }\}$$

という集合を考えます。$\mathcal{F}([0,1],\mathbf{R})$ の要素

$$f, g \in \mathcal{F}([0,1],\mathbf{R})$$

には次のようにして加法 $f+g$ が定義できます。

$$f+g : x \in [0,1] \mapsto f(x)+g(x) \in \mathbf{R}$$

上の式の意味は $[0,1]$ の任意の元 $x \in [0,1]$ に対して $f(x)+g(x)$ を対応させる関数で関数 $f+g$ を定義するという意味です。
同様に, $\alpha \in \mathbf{R}$ と $f \in \mathcal{F}([0,1],\mathbf{R})$ の乗法 αf は

$$\alpha f : x \in [0,1] \mapsto \alpha f(x) \in \mathbf{R}$$

で定義します。この式の意味は $[0,1]$ の任意の元 $x \in [0,1]$ に対して $\alpha f(x)$ を対応させる関数で関数 αf を定義するという意味です。

全く同様に $-f \in \mathcal{F}([0,1],\mathbf{R})$,$0 \in \mathcal{F}([0,1],\mathbf{R})$ もそれぞれ

$$-f : x \in [0,1] \mapsto -f(x) \in \mathbf{R}$$

と

$$0 : x \in [0,1] \mapsto 0 \in \mathbf{R}$$

で定義します。このような定義のもとに,$\mathcal{F}([0,1],\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$) 上の線形空間になっています。

[問題 3.1] $\mathbf{V} = \mathcal{F}([0,1],\mathbf{R})$ として, 線形空間の条件を充たしていることを確認してください。

1.1.2 部分線形空間

$\mathbf{V}$ が $\mathbf{R}$ 上の線形空間であるとします。すなわち,

任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ について $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$ について $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
$\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ と任意 $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ について $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
任意 $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ について$-\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ が存在して $\mathbf{x} \in \mathbf{V}\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$
任意の$\alpha \in \mathbf{V}$ と任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ について$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
任意の$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ と任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ について $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
任意の$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ と任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{V}(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$
$1 \in \mathbf{R}$ と任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ について $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

が成り立っているものとします。
ここで,$\mathbf{V}$ の部分集合 $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ について

$\mathbf{W} \neq \phi$ ($\mathbf{W}$ は空集合でないという意味)
任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}$ について $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{W}$
任意の$\alpha \in \mathbf{R}$ と任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ について$\alpha\mathbf{x} \in \mathbf{W}$

が成り立っているとき
$\mathbf{W}$ も $\mathbf{R}$ 上の線形空間になっています。$\mathbf{W}$ を $\mathbf{V}$ の部分線形空間といいます。
[**問題 3.2**] $\mathbf{W}$ が上の条件を充たすとき線形空間になっていることを確かめてください。

[**例 1**]

$C[0,1]$ でからへの連続な関数の集合を表すとき, すなわち,

$$C[0,1] = \{f | f \text{ は関数 } [0,1] \to \mathbf{R} \text{ で}, [0,1] \text{ で } f \text{ は連続 }\}$$

のとき,$C[0,1]$ は $\mathcal{F}([0,1], \mathbf{R})$ の部分線形空間です。
[**証明**]

復習すが, 関数 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ が $[0,1]$ 上で連続というのは

「任意の $x \in [0,1]$ について, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して, これらに依存したある正数 $\delta(x, \varepsilon)$ が存在して

$$|x-y|<\delta(x,\varepsilon)$$

となる任意の $y\in[0,1]$ に対して

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

が成り立つ」ということでした。

まず, 部分集合 $C[0,1]$ は空集合ではありません。実際関数

$$0:x\in[0,1]\mapsto 0\in\mathbf{R}$$

は $[0,1]$ 上で連続で,$C[0,1]$ の元の一つです。

次に関数

$$f:x\in[0,1]\mapsto 0\in\mathbf{R},\quad ,g:x\in[0,1]\mapsto 0\in\mathbf{R}$$

が $C[0,1]$ の元とします。このとき

$$f+g:x\in[0,1]\mapsto f(x)+g(x)\in\mathbf{R}$$

も $C[0,1]$ の元です。実際
$\mathcal{F}([0,1],\mathbf{R})$ は線形空間でしたから $f+g$ は $\mathcal{F}([0,1],\mathbf{R})$ の元です。

f,g は $[0,1]$ 上で連続でしたので, 任意の $x\in[0,1]$ について, 任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して

それぞれ,

$$\frac{1}{2}\varepsilon$$

と x に依存したある正数

$$\delta_1(x,\frac{1}{2}\varepsilon),\quad \delta_2(x,\frac{1}{2}\varepsilon)$$

が存在して

$$|x-y|<\delta_1(x,\frac{1}{2}\varepsilon)$$

となる任意の $y\in[0,1]$ に対して

$$|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

$$|x-y| < \delta_2(x, \frac{1}{2}\varepsilon)$$

となる任意の $y \in [0,1]$ に対して

$$|g(x) - g(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

が成り立っています。

すると，

$$\delta(x,\varepsilon) < \delta_1(x,\varepsilon), \delta_2(x,\varepsilon)$$

となるように $\delta(x,\varepsilon)$ を選ぶと，

$$|x-y| < \delta(x,\varepsilon)$$

となる任意の $y \in [0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}
&|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \\
&= |f(x) + g(x) - (f(x) + g(x))| \\
&= |(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))| \\
&\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立っています。従って $f+g$ が $[0,1]$ 上で連続で，$C[0,1]$ の元となります。

さらに関数

$$f : x \in [0,1] \mapsto 0 \in \mathbf{R}$$

が $C[0,1]$ の元で $\alpha \in \mathbf{R}$ とします。このとき

$$\alpha f : x \in [0,1] \mapsto \alpha f(x) \in \mathbf{R}$$

も $C[0,1]$ の元です。実際
$\mathcal{F}([0,1], \mathbf{R})$ は線形空間でしたから αf は $\mathcal{F}([0,1], \mathbf{R})$ の元です。
$\alpha = 0$ なら $\alpha f = 0$ で，αf は $C[0,1]$ の元です。

$\alpha \neq 0$ なら $|\alpha| > 0$ です。

f, は $[0,1]$ 上で連続でしたので，任意の $x \in [0,1]$ について，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して

$$\frac{1}{|\alpha|}\varepsilon > 0$$

と x に依存したある正数

$$\delta_1(x, \frac{1}{|\alpha|}\varepsilon)$$

が存在して

$$|x - y| < \delta_1(x, \frac{1}{|\alpha|}\varepsilon)$$

となる任意の $y \in [0, 1]$ に対して

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{|\alpha|}\varepsilon$$

が成り立っています。

すると,

$$\delta(x, \varepsilon) < \delta_1(x, \frac{1}{|\alpha|}\varepsilon)$$

となるように $\delta(x, \varepsilon)$ を選ぶと,

$$|x - y| < \delta(x, \varepsilon)$$

となる任意の $y \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned}
&|\alpha f(x) - \alpha f(y)| \\
&\leq |\alpha||f(x) - f(y)| \\
&< |\alpha|\frac{1}{|\alpha|}\varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立っています。従って αf が $[0, 1]$ 上で連続で, $C[0, 1]$ の元となります。

[例 2] 前章にもでてきた,$C^1[0, 1]$

$$\begin{aligned}
&C^1[0, 1] = \{f | f : [0, 1] \text{ から } \mathbf{R} \text{ への関数}, [0, 1] \text{ で微分可能}, \\
&\text{その導関数 } x \in [0, 1] \mapsto f'(x) \text{ が } x \text{ について連続。}\}
\end{aligned}$$

は $C[0,1]$,$\mathcal{F}([0,1],\mathbf{R})$ の部分線形空間です。
しかも

$$C^1[0,1] \subseteq C[0,1] \subseteq \mathcal{F}([0,1],\mathbf{R})$$

です。

[証明]

まず微積分の復習から。

関数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ が $x_0\in[0,1]$ で微分可能であるとは次の極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h} \tag{1.1}$$

が存在することでした。そしてこの極限値を

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

または

$$f'(x_0)$$

で表しました。

さらに, 任意の $x_0\in[0,1]$ で微分可能であるとき関数 f は $[0,1]$ 上で微分可能であるといいました。

$$\frac{df}{dx}: x\in[0,1]\mapsto\frac{df}{dx}(x)\in\mathbf{R}$$

あるいは

$$f': x\in[0,1]\mapsto\frac{df}{dx}(x)\in\mathbf{R}$$

を導関数と呼びました。さらに, この導関数が $[0,1]$ 上連続のとき, すなわち

$$f'\in C[0,1]$$

のとき, 関数 f は $[0,1]$ 上で連続微分可能といいます。

結局, 以上の定義を使って書き直せば,

$$C^1[0,1]=\{f|f\in C[0,1]\text{ かつ }\quad f\text{ は }[0,1]\text{ 上微分可能かつ }\quad f'\in C[0,1]\}$$

です。

関数

$$0 : x \in [0,1] \mapsto 0 \in \mathbf{R}$$

は $[0,1]$ 上で連続で, かつ, 微分可能なので $C^1[0,1]$ の元の一つです。
よって,$C^1[0,1]$ は空集合ではありません。

次に

$$f, g \in C^1[0,1], \alpha \in \mathbf{R}$$

なら

$$f, g \in C[0,1], \alpha \in \mathbf{R}$$

で,

$$C[0,1]$$

が線形空間になっていることは既に確かめましたので,

$$f + g, \alpha f \in C[0,1]$$

です。

さらに定義から,f, g は $[0,1]$ 上微分可能かつ

$$f', g' \in C[0,1]$$

です。

また，任意の $x_0 \in [0,1]$ にいて，

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x)}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{(\alpha f)(x_0+h) - (\alpha f)(x)}{h} \\
&= \alpha f \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x)}{h}
\end{aligned}$$

となることから,

$f+g, \alpha f$ は $[0,1]$ 上微分可能で,

$$(f+g)' = f' + g' \in C[0,1] \quad (\alpha f)' = \alpha f' \in C[0,1]$$

よって,

$$f+g, \alpha f \in C^1[0,1]$$

1.2　ノルム線形空間

さて，$\mathbf{R}$ やそれから作られる n 次元数ベクトル空間 $\mathbf{R^n}$ については線形空間であるという性質以外に絶対値やノルムが定義されていました。これも復習しておきます。

$\mathbf{R}$ についてはその要素 $x \in \mathbf{R}$ に対して絶対値とよばれる負でない数 $|x|$ が対応して

任意の $x \in \mathbf{R}$ について $0 \leq |x|$

任意の $x \in \mathbf{R}$ について $0 = |x| \Leftrightarrow x = 0$

任意の $x, y \in \mathbf{R}$ について $|x+y| \leq |x| + |y|$

任意の $x, y \in \mathbf{R}$ について $|xy| = |x||y|$

同様に $\mathbf{R^n}$ の要素 $\mathbf{x}$ についても $\mathbf{R}$ での絶対値のようにノルムと呼ばれる負でない数 $||\mathbf{x}||$ が対応して

任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$について $0 \leq ||\mathbf{x}||$

任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$について $0 = ||\mathbf{x}|| \Leftrightarrow x = 0$

任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R^n}$について $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + |\mathbf{x}||$

任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$と$\alpha \in \mathbf{R}$ について $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha| \ ||\mathbf{x}||$

が成り立っています。

$\mathbf{R^n}$ の要素

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

のノルム $||\mathbf{x}||$ の定義の方法は幾通りかありました。

$$||\mathbf{x}||_1 = max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$$
$$||\mathbf{x}||_2 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\}$$
$$||\mathbf{x}||_3 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

[**問題 3.3**]

上の３つが何れもノルムを定義することを確かめてください。また,

$$||\mathbf{x}||_1, ||\mathbf{x}||_2, ||\mathbf{x}||_3$$

について次の関係があることを確かめて下さい。

ある正数 $k_{12} > 0$ が存在して, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$ について

$$||\mathbf{x}||_1 \leq k_{12}||\mathbf{x}||_2$$

ある正数 $k_{23} > 0$ が存在して, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$ について

$$||\mathbf{x}||_2 \leq k_{23}||\mathbf{x}||_3$$

ある正数 $k_{31} > 0$ が存在して, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R^n}$ について

$$||\mathbf{x}||_3 \leq k_{31}||\mathbf{x}||_1$$

定義 1.2.1　L を線形空間とし, L 上に, その要素 f に負でない数 $|f|$ を対応させる写像
　実数値関数

$$f \in L \mapsto |f| \in \mathbf{R}$$

が定義され,$\|f\|$ が次の条件をみたすとき L をノルム *(*線形*)* 空間といいます。

1,　(正値性)　$\|f\| \geq 0, f = 0$ のときだけ $\|f\| = 0$
2,　(スカラー倍)　$\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$　(α : 任意定数)
3,　(三角不等式)　$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

[例 1]
例 1　$f \in C[0,1]$ のノルムを

$$\|f\|_C \stackrel{\triangle}{=} \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \tag{1.2}$$

と定義するノルム線形空間になります。

(証明)　(1.4) 式より明らかに $\|f\|_C \geq 0$. また $f \equiv 0$ ならば $\|f\|_C = 0$.
そして $\|f\|_C = 0$ ならば

$$\|f\|_C = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \text{ となるので } f \equiv 0.$$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_C &= \max_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \leq \max_{x\in[0,1]} (|f(x)|+|g(x)|) \\
&\leq \max_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max_{x\in[0,1]} |g(x)| \\
&= \|f\|_C + \|g\|_C \\
\|\alpha f\|_C &= \max_{x\in[0,1]} |\alpha f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |\alpha||f(x)| = |\alpha| \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \\
&= |\alpha|\|f\|_C
\end{aligned}$$

以上より (正値性),(スカラー倍),(三角不等式) が示されノルム空間となります。

例 2　$f \in C[0,1]$ のノルムを

$$\|f\|_l \triangleq \int_0^1 |f(x)|\,dx \tag{1.3}$$

で定義してもノルム線形空間になります。

(証明)
(1.7) 式より明らかに

$$\|f\|_l \geq 0.$$

また $f \equiv 0$ ならば $\|f\|_l = 0$.
そして $\|f\|_l = 0$ ならば

$$\|f\|_l = \int_0^1 |f(x)|\,dx = 0$$

となるので $f \equiv 0$.

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_l &= \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_0^1 (|f(x)|+|g(x)|)\,dx \\
&= \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |g(x)|\,dx \\
&= \|f\|_l + \|g\|_l \\
\|\alpha f\|_l &= \int_0^1 |\alpha f(x)|\,dx = |\alpha| \int_0^1 |f(x)|\,dx \\
&= |\alpha|\|f\|_l
\end{aligned}$$

以上より (正値性),(スカラー倍),(三角不等式) が示されノルム線形空間となります。

例 3　$f \in C^1[0,1]$ は以下のノルムで, ノルム線形空間になります。

$$\|f\|_{C^1,1} \stackrel{\triangle}{=} \max\{\|f\|_C, \|f'\|_C\}$$
$$\|f\|_{C^1,2} \stackrel{\triangle}{=} \|f\|_C + \|f'\|_C$$
$$\|f\|_{C^1,3} \stackrel{\triangle}{=} \max\{\|f\|_l, \|f'\|_l\}$$
$$\|f\|_{C^1,4} \stackrel{\triangle}{=} \|f\|_l + \|f'\|_l$$

[**問題 3.4**]　上を証明してください。

1.3 Banach 空間

定義 1.3.1　L を線形空間とし，L 上に実数値関数

$$f \in L \mapsto |f| \in \mathbf{R}$$

が定義され,$\|f\|$ が次の条件をみたすとき L をノルム *(*線形*)* 空間と定義しました。

$$\begin{aligned} &1, \quad (\text{正値性}) \quad \|f\| \geq 0, f = 0 \text{ のときだけ } \|f\| = 0 \\ &2, \quad (\text{スカラー倍}) \quad \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| \quad (\alpha : \text{任意定数}) \\ &3, \quad (\text{三角不等式}) \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

このノルムは実数 $\mathbf{R}$ の絶対値 $|x|$ の一般化です。さらにこれを用いて実数の集合 $\mathbf{R}$ や数ベクトル空間 $\mathbf{R^n}$ の「完備性」の一般化が可能になります。

定義 1.3.2 (Caushy 列)　ノルム空間 L の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が *Caushy* 列 *(*あるいは基本列*)* であるとは*,*

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \quad (n, m \to 0)$$

が成り立つことです。

定義 1.3.3　ノルム線形空間 L の任意の *Caushy* 列が収束するとき，L は完備 *(complete)* であるといいます。

定義 1.3.4　完備なノルム線形空間を *Banach* 空間といいます。

例 1　$f \in C[0,1]$ のノルムを

$$\|f\|_C \stackrel{\triangle}{=} \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \tag{1.4}$$

で定義すると Banach 空間になります。

(証明)　ノルム線形空間であるは前節で証明しました。
完備性を示します。
関数列 $\{f_n\}$ が Caushy 列と仮定すると,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_1(\varepsilon) \in \boldsymbol{N},\ \forall m,n > N_1(\varepsilon),\ \forall x_0 \in [0,1]$$

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.5}$$

です。すなわち任意の $x_0 \in [0,1]$ に対して $\{f_n(x_0)\}$ は
Caushy 列です。従って実数の完備性により

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x_0)$$

が存在して,

$$f(x_0) = \lim_{m\to\infty} f_m(x_0)$$

とおくと $f \in C[0,1]$ です。

(証明)

$$\forall x \in [0,1],\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N$$

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f_n(x+h)| &< \frac{\varepsilon}{3} \\ |f_n(x) - f(x)| &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

これらより

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + |f_n(x+h) + f_n(x)| \end{aligned}$$

$f_n \in C[0,1]$ だから

$$\forall\varepsilon,\ \exists\delta(\varepsilon),\ |h| < \delta$$

$$|f_n(x+h) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

したがって

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

ゆえに $f \in C[0,1]$. ∎

(**例 1** の証明の続き)
よって

$$\forall x_0 \in [0,1],\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2(\varepsilon, x_0) \in \boldsymbol{N},\ \forall m > N_2(\varepsilon, x_0)$$

$$|f_m(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.6}$$

(1.5),(1.6) より

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1(\varepsilon,) \in \boldsymbol{N},\ \forall n > N_1(\varepsilon),\ \forall x_0 \in [0,1]$$

$$\exists N_3(\varepsilon, x_0) > N_1(\varepsilon),\ N_2(\varepsilon, x_0),\ \forall m > N_3(\varepsilon, x_0)$$

$$\begin{aligned} |f_n(x_0) - f(x_0)| &\le |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{よって } |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

以上より

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N},\ \forall n > N(\varepsilon),\ \forall x_0 \in [0,1]$$

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

これより

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N},\ \forall n > N(\varepsilon)$$

$$\max_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\therefore \|f_n - f\|_C < \varepsilon$$

よって $n \to \infty$ のとき

$$\|f_n - f\|_C \to 0$$

ゆえに Caushy 列がつねに収束するので完備です。 ∎

例 2　$f \in C[0,1]$ のノルムを

$$\|f\|_l \triangleq \int_0^1 |f(x)|\, dx \tag{1.7}$$

と定義するとノルム空間になるが Banach 空間にはなりません。
(証明)　ノルム線形空間であることは前節を示しました。

完備でないことを示します。
$f_n(x) \in C[0,1]$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

とおけば f_n はこの空間での Caushy 列になりますが，その関数列の極限になっているような連続関数はありません。したがって完備ではありません。
∎

例 3　$f \in C^1[0,1]$ のノルムを

$$\|f\|_{C^1} \stackrel{\triangle}{=} \|f\|_C + \|f'\|_C$$

と定義すると Banach 空間になります。これを証明する前に次の定理を示します。

定理 1.3.1　$f_n \in C^1[0,1]$ の導関数 f_n' からなる関数列 $\{f_n'\}$ が一様収束するとする。
さらに，$c \in [0,1]$ に対して $f_n(c)$ は収束するとする。
このとき f_n からなる関数列 $\{f_n\}$ は一様収束し，かつ極限関数

$$\lim_{n\to\infty} f_n$$

は連続微分可能で，関係式

$$\forall x \in [0,1],\ \{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\}' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \tag{1.8}$$

が成り立つ。

(証明)　数列 $\{f_n(c)\}$ が収束することから
$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists N \in \boldsymbol{N}$, $m > n > N$ ならば

$$|f_m(c) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.9}$$

また，関数列 $\{f_n'\}$ が一様収束することから，
同一の ε, N について $m > n > N$ ならば $\forall x \in [0,1]$ に対して

$$|f_m'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.10}$$

となる。
$\{f_m - f_n\}$ に平均値定理を適用すると，$\forall x \in [0,1]$ に対して

$$\{f_m(x) - f_n(x)\} = \{f_m(c) - f_n(c)\} + (x-c)\{f_m'(\xi) - f_n'(\xi)\},, \xi \in (x,c) or (c,x)$$

したがって (1.9),(1.10) により

$$\begin{aligned}&|f_m(x)-f_n(x)| \leq |f_m(c)-f_n(c)| + |f'_m(\xi)-f'_n(\xi)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

以上より，$\forall\varepsilon>0$ に対して $m>n>N$ ならば

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

となるような，x に無関係である

$$N\in\mathbf{N}$$

が存在します。すなわち，関数列 $\{f_n\}$ は一様収束します。したがって，

$$\lim_{n\to\infty} f_n$$

が存在します。
関数列 $\{f'_n\}$ は一様収束するので

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_c^x f'_n(t)\,dt &= \int_c^x \lim_{n\to\infty} f'_n(t)\,dt \\ \lim_{n\to\infty}\{f_n(x)-f_n(c)\} &= \int_c^x \lim_{n\to\infty} f'_n(t)\,dt\end{aligned}$$

ところで，$\{f_n\}$ と $\{f_n(c)\}$ は収束するから

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(c) = \int_c^x \lim_{n\to\infty} f'_n(t)\,dt$$

関数列 が一様収束し，各関数 が連続であるから，極限関数 は連続です。
したがって，右辺は連続関数の不定積分として連続微分可能です。
ゆえに，右辺は連続微分可能であって，微分すると

$$\forall x\in[0,1],\ \{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\}' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

となります。 ∎

(**例 3** の証明)　まずノルム空間であることを示します。
例 1 より $\|f\|_C\geq 0, \|f'\|_C\geq 0$.$\|f\|_C=0$ のとき $f\equiv 0$ ゆえに $f'\equiv 0$

$$\therefore \|f\|_C+\|f'\|_C=\|f\|_{C^1}\geq 0.\text{等号は } f\equiv 0 \text{ のとき成立}$$

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{C^1} &= \|f+g\|_C+\|f'+g'\|_C \leq \|f\|_C+\|g\|_C+\|f'\|_C+\|g'\|_C \\ &= \|f\|_C+\|f'\|_C+\|g\|_C+\|g'\|_C = \|f\|_{C^1}+\|g\|_{C^1} \\ \|\alpha f\|_{C^1} &= \|\alpha f\|_C+\|(\alpha f)'\|_C = |\alpha|\|f\|_C+|\alpha|\|f'\|_C = |\alpha|(\|f\|_C+\|f'\|_C) \\ &= |\alpha|\|f\|_{C^1}\end{aligned}$$

以上より (正値性),(スカラー倍),(三角不等式) が示されノルム空間となります。次に完備性を示します。
$f_n \in C^1[0,1]$ からなる関数列 $\{f_n\}$ が Caushy 列と仮定すると,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \boldsymbol{N},\ m,n > N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{C^1} < \varepsilon \tag{1.11}$$

式 (1.11) より

$$\|f_n - f_m\|_C < \varepsilon$$

$$\|f'_n - f'_m\|_C < \varepsilon$$

とできます。すなわち $\{f_n\}$, $\{f'_n\}$ は Caushy 列です。まず

$$f = \lim_{m\to\infty} f_m, \qquad f \in C[0,1]$$

が存在します。すなわち

$$\|f_n - f\|_C \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{1.12}$$

同様に

$$g = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

が存在しかつ $f' \in C[0,1]$ です。すなわち

$$\|f'_n - g\|_C \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

定理 2.1 より

$$f' = g$$

$$\therefore \|f'_n - f'\|_C \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{1.13}$$

(1.12),(1.13) より

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{C^1} &= \|f_n - f\|_C + \|f'_n - f'\|_C \\ &\to 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

ゆえに Caushy 列がつねに収束するので完備です。 ∎

例 4　$f \in C^n[0,1]$ のノルムを

$$\|f\|_{C^n} \triangleq \sum_{i=0}^{n} \|f^{(i)}\|_C \tag{1.14}$$

で定義すると Banach 空間になります。

(証明)　まずノルム空間であることを示します。
例 3 と同様に

$$\|f\|_C \geq 0,\ \|f'\|_C \geq 0, \cdots, \|f^{(n)}\|_C \geq 0$$

$$\therefore \|f\|_{C^n} = \sum_{i=0}^{n} \|f^{(i)}\|_C \geq 0.$$

$\|f\|_{C^n} = 0$ ならば (正値性) と (1.14) より $f \equiv 0$.
$f \equiv 0$ ならば $f' \equiv f'' \equiv \cdots \equiv f^{(n)} \equiv 0$

$$\therefore \|f\|_{C^n} = \sum_{i=0}^{n} \|f^{(i)}\|_C = 0$$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{C^n} &= \sum_{i=0}^{n} \|(f+g)^{(i)}\|_C = \sum_{i=0}^{n} \|f^{(i)} + g^{(i)}\|_C \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \|f^{(i)}\|_C + \sum_{i=0}^{n} \|g^{(i)}\|_C = \|f\|_{C^n} + \|g\|_{C^n} \\
\|\alpha f\|_{C^n} &= \sum_{i=0}^{n} \|(\alpha f)^{(i)}\|_C = |\alpha| \sum_{i=0}^{n} \|f^{(i)}\|_C \\
&= |\alpha| \|f\|_{C^n}
\end{aligned}$$

以上より (正値性),(スカラー倍),(三角不等式) が示されノルム空間となります。次に完備性を示します。
帰納法を用いることにして $C^{n-1}[0,1]$ が Banach 空間であるとします。そして，**例 3** 同様に $f_l \in C^n[0,1]$ からなる関数列 $\{f_l\}$ が Caushy 列と仮定すると，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \boldsymbol{N},\ m, l > N \Rightarrow \|f_l - f_m\|_{C^n} < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\|f_l - f_m\|_C^n &= \|f_l - f_m\|_{C^{n-1}} + \|f_l^n - f_m^n\|_C \\
&= \|f_l - f_m\|_{C^{n-2}} + \|f_l^{n-1} - f_m^{n-1}\|_C^1
\end{aligned}$$

ゆえに，$\{f_l\}$ は C^{n-1} の Caushy 列です。
C^{n-1} を Banach 空間と仮定したので，

$$\text{よって}\ \exists f \in C^{n-1}[0,1]$$

$$\begin{aligned}
\|f_l - f\|_{C^{n-1}} &\to 0 \qquad (l \to \infty) &(1.15)\\
\text{よって}\ \|f_l^{n-1} - f^{n-1}\|_C &\to 0 \qquad (l \to \infty) &(1.16)
\end{aligned}$$

同様に，$\{f_l^{n-1}\}$ は $C^1[0,1]$ の Caushy 列であるから**例 3** より，$\{f_l^{n-1}\}$ は $C^1[0,1]$ の Banach 空間になります。

$$\therefore \exists g \in C^1[0,1]$$

$$\begin{aligned}
\|f_l^{n-1} - g\|_C^1 &\to 0 \qquad (l \to \infty) \\
\|f_l^{n-1} - g\|_C &\to 0 \qquad (l \to \infty) \qquad (1.17) \\
\|f_l^n - g'\|_C &\to 0 \qquad (l \to \infty) \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

ここで (1.16),(1.17) より，

$$\begin{aligned}
\|f^{n-1} - g\|_C &\leq \|f^{n-1} - f_l^{n-1}\|_C + \|f_l^{n-1} - g\|_C \\
&\to 0 \qquad (l \to \infty)
\end{aligned}$$

$$\therefore \|f^{n-1} - g\|_C = 0$$

ノルムの正値性より

$$f^{n-1} = g$$

$g \in C^1[0,1]$ より $f^{n-1} \in C^1[0,1]$

$$\therefore f \in C^n[0,1]$$

$$\begin{aligned}
\|f_l - f\|_{C^n} &= \|f_l - f\|_{C^{n-1}} + \|f_l^n - f^n\|_C \\
&= \|f_l - f\|_{C^{n-1}} + \|f_l^n - (f^{n-1})'\|_C \\
&= \|f_l - f\|_{C^{n-1}} + \|f_l^n - g'\|_C
\end{aligned}$$

(1.15),(1.18) より

$$\|f_l - f\|_{C^n} \to 0 \qquad (l \to \infty)$$

以上より完備性が示されました。 ∎