最適化理論-変分法と$Fréchet$微分その４-

師玉康成

目 次

0.1 $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ 空間

前章で$Fr\acute{e}chet$微分

$$L_f \ : \ \vec{E} \to \vec{F}$$

を定義しましたがたが，これは $\vec{E}$ から $\vec{E}$ への連続線形写像でした。
最後にこの章で $\vec{E}$ から $\vec{E}$ への連続線形写像全体の空間の構造について調べておきましょう。

$$\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F}) = \{P; P : \vec{E} \to \vec{F}, 連続, 線形\}$$

とし，$P \in \mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ のノルムを

$$\|P\|_{\mathcal{L}} \overset{\triangle}{=} \sup_{\|x\|_{\vec{E}} \neq 0} \frac{\|P(x)\|_{\vec{F}}}{\|x\|_{\vec{E}}} \tag{1}$$

と定義します。

[**定理**]

$\vec{F}$ が Banach 空間ならば $\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ は Banach 空間になる。

証明 $P_1, P_2 \in \mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ とすれば，任意の $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ について，

$$\alpha P_1 + \beta P_2 \in \mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$$

です。従って，$\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ は線形空間です。
$\{P_n\} \subseteq \mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ が $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ ノルムの意味で Caushy 列と仮定すると

$$\forall\varepsilon, \exists N(\varepsilon), \forall m, n > N(\varepsilon)$$

$$\|P_m - P_n\|_{\mathcal{L}} < \varepsilon \tag{2}$$

(1) より

$$\|P_m - P_n\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_{\vec{E}} \neq 0} \frac{\|P_m(x) - P_n(x)\|_{\vec{F}}}{\|x\|_{\vec{E}}} < \varepsilon$$

これより

$$\forall \varepsilon, \exists N(\varepsilon), \forall m, n > N(\varepsilon) \forall x \in \vec{E}$$

$$\|P_m(x) - P_n(x)\|_{\vec{F}} < \varepsilon$$

したがって $\{P_n(x)\}$ は $\|\cdot\|_{\vec{F}}$ ノルムの意味で Caushy 列となります。
$\vec{F}$ は Banach 空間ですから、完備なので $\forall x \in \vec{E}$ に対して

$$\exists Y = \lim_{m\to\infty} P_m(x), \qquad Y \in \vec{F}$$

$Y = P(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} P(\alpha x + \beta y) &= \lim_{m\to\infty} P_m(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{m\to\infty} \{\alpha P_m(x) + \beta P_m(y)\} \quad (\because P_m : \text{線形}) \\ &= \alpha \lim_{m\to\infty} P_m(x) + \beta \lim_{m\to\infty} P_m(y) \\ &= \alpha P(x) + \beta P(y) \end{aligned}$$

ゆえに P の線形性が示されました。
次に連続であることを示します。(2) より

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}} \leq \|P_m\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon \tag{3}$$

$z \in \vec{E}$ に対して

$$\begin{aligned} \|P_n z)\|_{\vec{F}} &\leq \|P_n\|_{\mathcal{L}} \cdot \|z\|_{\vec{E}} \\ &\leq (\|P_m\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon)\|z\|_{\vec{E}} \qquad ((3) \text{ によります}) \\ \lim_{n\to\infty} \|P_n z)\|_{\vec{F}} &\leq (\|P_m\|_{\mathcal{L}} + \varepsilon)\|z\|_{\vec{E}} \end{aligned}$$

$$K = \varepsilon + \|P_m\|_{\mathcal{L}}$$

とすると

$$\|P(z)\|_{\vec{F}} \leq K\|z\|_{\vec{E}}$$

よって P は連続となります。結局 $P \in \mathcal{L}(\vec{E}; \vec{F})$ です。
したがって

$$\begin{aligned} \|P_n(x) - P(x)\|_{\vec{F}} &\to 0 \qquad (n \to \infty) \\ \therefore \sup_{\|x\|_{\vec{E}} \neq 0} \frac{\|P_n(x) - P(x)\|_{\vec{F}}}{\|x\|_{\vec{E}}} &\to 0 \qquad (n \to \infty) \end{aligned} \tag{4}$$

ゆえに (1),(4) より

$$\begin{aligned} \|P_n - P\|_{\mathcal{L}} &= \sup_{\|x\|_{\vec{E}} \neq 0} \frac{\|P_n(x) - P(x)\|_{\vec{F}}}{\|\vec{E}\|_{\vec{E}}} \\ &\to 0 \qquad (n \to 0) \end{aligned}$$

以上より $\{P_n\}$ は収束するので完備性が示されました。$\mathcal{L}(\vec{E};\vec{F})$ はノルム空間ですから Banach 空間になっています。